微分積分入門1 第7回課題解答

0 第7回課題の解答について

第7回課題の厳密な解を示す。

1) については $1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\cdots$ を積分する際には、無限和の項別積分が可能か否か検討する必要があるので注意されたい。

2) で用いた不等式 $0 \le te^{-t} \le e^{-1}(t \ge 0)$ は第5回の課題 3) で求められる不等式の特殊な場合である。

1 1) 解答

$$f_n(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^{2k+1}}{2k+1}\right)-\arctan x \tag{1}$$

とおくと

$$f_n'(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}(-x)^{2k}\right)-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+(-x)^{2(n+1)}}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{(-x)^{2(n+1)}}{1+x^2} \tag{2}$$

なので $x \ge 0$ のとき $f_{2m}'(x) \ge 0, f_{2m+1}'(x) \le 0 (m=0,1,\ldots)$ が成り立つ。$f_n(0)=0$ だから、$x \ge 0$ のとき $f_{2m}(x) \ge 0, f_{2m+1}(x) \le 0 (m=0,1,\ldots)$ が成り立つ。よって $m=0,1,\ldots$ に対し

$$f_{2m}(1)=\left(\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right)-\frac{\pi}{4} \ge 0 \tag{3}$$

かつ

$$f_{2m+1}(1)=\left(\sum_{k=0}^{2m+1}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right)-\frac{\pi}{4} \le 0 \tag{4}$$

だから

$$\sum_{k=0}^{2m+1}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} \le \frac{\pi}{4} \le \sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} \tag{5}$$

が成り立つ。$m \to \infty$ の極限をとって $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}$ がわかる。

2　2) 解答

$f(t) = te^{-t}$ とおくと $f'(t) = (t-1)e^{-t}$ より $f(t)$ は $0 \le t \le 1$ で単調増加、$t \ge 1$ で単調減少。よって $t \ge 0$ に対して $0 \le f(t) \le f(1) = e^{-1}$ が成り立つ。よって $u \ge 0$ に対して

$$0 \le ue^{-u^2} \le \frac{1}{eu}, \tag{6}$$

$u \le 0$ に対して

$$0 \ge ue^{-u^2} \ge \frac{1}{eu} \tag{7}$$

が成り立つから、

$$\lim_{u \to +\infty} ue^{-u^2} = \lim_{u \to -\infty} ue^{-u^2} = 0 \tag{8}$$

となることがわかる。よって $u = 1/x$ とおくと

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{u \to +\infty} ue^{-u^2} = \lim_{x \to -0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{u \to -\infty} ue^{-u^2} = 0 \tag{9}$$

である。これは $f'(0) = 0$ を意味する。また $x \ne 0$ のときは

$$f'(x) = (e^{-1/x^2})' = -\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} \tag{10}$$

である。