関数の連続性

Tomohiro Yamada

1　関数の極限

関数の極限は、a, α がともに実数の場合は、x が a ではないが、a に近いとき、$f(x)$ が α に近づくことを

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

によりあらわす。また、x が a より小さいが a に近いとき、$f(x)$ が α に近づくことを

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$$

とあらわし、x が a より大きいが a に近いとき、$f(x)$ が α に近づくことを

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$$

によりあらわす。

たとえば $f(x) = \lfloor x \rfloor$ を x を超えない最大の整数とすると、$f(1) = 1$ であるが、$0 \leq x < 1$ のとき $f(x) = 0$ なので、

$$\lim_{x\to 1-0} \lfloor x \rfloor = 0, \lim_{x\to 1+0} \lfloor x \rfloor = 1$$

となる。

$\lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha$ とする。このとき、$\beta < \alpha < \gamma$ となる実数 β, γ をとると、x が a より小さいが a に近いとき、

$$\beta < f(x) < \alpha$$

となる。

同様に、$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ とする。このとき、$\beta < \alpha < \gamma$ となる実数 β, γ をとると、x が a より大きいが a に近いとき、

$$\beta < f(x) < \alpha$$

となる。

2　関数の連続性

$f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは、$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となることである。また、$f(x)$ が $x=(a,b)$ で連続であるとは、$a<t<b$ となるすべての t について、$f(x)$ が $x=t$ で連続となることである。たとえば、$a<b<c$ で、$f(x)$ が $(a,b),(b,c)$ で連続、$g(x)$ が (a,c) で連続で、$a<x<c, x\neq b$ で $f(x)=g(x)$ となるとき、$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = g(b)$ となる（$f(b)$ の値にはよらない）。

一方、閉区間 $[a,b]$ において関数が連続であるかどうか論じるときは少し注意を要する。端点においては区間の外側（$x=a$ のときは左側、$x=b$ のときは右側）の状況は問題とならなくなるからである。それで、$f(x)$ が $x=[a,b]$ で連続であるとは、

- $a<t<b$ となるすべての t について、$f(x)$ が $x=t$ で連続
- $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$

の 3 つが成り立つことだということができる。

$f(x)$ が $x=a$ で連続で、$f(a)<y$ ならば、

$$\lim_{x\to a} f(x) < y$$

だから、x が a に近いとき、$f(x)<y$ となることがわかる。

3　最大値・最小値の原理

ここでは、連続関数に関する最大値・最小値の原理を証明する。

定理 1 (最大値・最小値の原理)**.** $[a,b]$ で連続な関数は、$[a,b]$ で最大値および最小値をとる。

まず、$f(x)$ が $[a,b]$ で上に有界である場合を考える。第 1 回の講義で説明した実数の連続性から、$f(x)$ は $[a,b]$ において上限

$$M = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$$

をもつ。この M が $[a,b]$ における $f(x)$ の最大値であることを示す。

$[a,b]$ において $f(x) \leq M$ であることは、M が $[a,b]$ における $f(x)$ の上界であることから明らかである。よって、あとは $f(x)=M$ となる x が $[a,b]$ からとれることを示せばよい。

一方、M は $[a,b]$ における $f(x)$ の上界のなかでも最小のものであるから、M より小さい数、たとえば正の整数 $n=1,2,\ldots$ に対して $M-1/n$ は $[a,b]$ における $f(x)$ の上界ではない。よって

$$f(u_n) > M - \frac{1}{n}$$

となる u_n が $[a,b]$ から少なくとも 1 つとれる。一方、M は $[a,b]$ における $f(x)$ の上界であるから

$$M - \frac{1}{n} < f(u_n) \le M$$

が成り立つ。はさみうちの原理から、

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = M$$

が成り立つ。$u = \lim_{n\to\infty} u_n$ とおくと、$f(x)$ は連続だから、$f(u) = M$ となって、M が $[a,b]$ における $f(x)$ の最大値であることを示せたように思える。

しかし、この議論には誤りがある。そもそも u_n が収束するか定かでないからである（収束するとき、その極限値が $[a,b]$ に属することは後に示すように、比較的容易に確かめられる）。

この問題を解決するために、部分列の概念を用いる。

実数列 v_m $(m = 1,2,\ldots)$ が実数列 u_n $(n = 1,2,\ldots)$ の部分列であるとは、$v_m = u_{a_m}$ となる、狭義単調増加な数列 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots$ が存在することである。実数列 v_m が実数列 u_n の部分列で、u_n が u に収束するとき、v_m も u に収束する。

実数の連続性 3 (実数の連続性 3（Bolzano-Weierstrass の定理）). 有界な実数列は収束する部分列をもつ。

定理 2. ある閉区間 $[a,b]$ における実数列 u_n が極限値 u に収束するとき、u も閉区間 $[a,b]$ に含まれる。

Proof. $u < a$ ならば、n が大きいとき $u_n < a$ とならなければならないが、これは仮定に反する。同様に、$u > b$ ならば、n が大きいとき $u_n > b$ とならなければならないが、これも仮定に反する。よって、$a \le u \le b$ でなければならない。 □

閉区間における実数列は有界だから、Bolzano-Weierstrass の定理とあわせて、

定理 3. 閉区間 $[a,b]$ における実数列は、収束する部分列をもち、その部分列の極限値は $[a,b]$ に含まれる。

ということがわかる。

このことから、上記の実数列 u_n も収束する部分列 $v_m (m = 1,2,\ldots)$ をもち、その極限値 $\lim_{m\to\infty} v_m = v$ は $[a,b]$ に含まれる。 $f(x)$ は $[a,b]$ で連続だから、

$$f(v) = \lim_{m\to\infty} f(v_m)$$

となる。v_m は u_n の部分列だから、$f(v_m)$ も $f(u_n)$ の部分列で、$f(u_n)$ は上記のように M に収束するから、$f(v_m)$ も M に収束する。よって

$$f(v) = M, a \le v \le b$$

となって、M が $[a,b]$ における $f(x)$ の最大値であることがわかる。

ここまでは、$f(x)$ が $[a,b]$ で上に有界である場合を考えていたが、$f(x)$ が $[a,b]$ で上に有界であることも同じようにして示せる。

$f(x)$ が $[a,b]$ で上に有界でないとき、$f(u_n) \to +\infty (n \to +\infty)$ となる $[a,b]$ における実数列 u_n $(n = 1,2,\ldots)$ が存在する。定理 3 から、u_n は収束する部分列 v_m $(m = 1,2,\ldots)$ をもち、$\lim_{m\to\infty} v_m = v$ は $[a,b]$ に含まれる。$f(x)$ は $[a,b]$ で連続だから、$f(v) = \lim_{m\to\infty} f(v_m)$ となる。しかし、v_m は u_n の部分列だから、$f(v_m)$ も $f(u_n)$ の部分列で、$\lim_{m\to\infty} f(v_m) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = +\infty$ となって矛盾する。

これらのことから、$[a,b]$ で連続な関数は、$[a,b]$ で最大値をとることが示せる。同様にして、$[a,b]$ で連続な関数は下に有界であることを示し、そこから $[a,b]$ で最小値をとることが示せる。

4　中間値の定理

連続関数に関する中間値の定理を証明する。

定理 4 (中間値の定理)**.** s,t が $s < t$ となる実数、$f(x)$ が区間 I で連続な関数で、区間 I において $f(a) = s$ となる $x = a$ と $f(b) = t$ となる $x = b$ が存在するとする。このとき、$f(x)$ は区間 I において $s \le y \le t$ となるすべての実数 y を値にとる。

とくに I が閉区間のとき、I における最大値を M とし、最小値を m とすると、I における $f(x)$ の値域は $[m,M]$ に一致する。

中間値の定理は最大値・最小値の原理から示される。

I は a,b を含む有界な閉区間、たとえば $[a,b]$ あるいは $[b,a]$ としても一般性を失わない。最大値・最小値の原理から、$f(x)$ は $[a,b]$ で最大値 M と最小値 m をとる。もちろん、$m \le s < t \le M$ である。

それで、$f(p) = m, f(q) = M$ となる p,q が $[a,b]$ からとれる。そこで $p < q$ のとき $J = [p,q]$、$p > q$ のとき $J = [q,p]$ とおく（$m < M$ だから $p \ne q$ は明らかである）。

$f(p) = m, f(q) = M$ なので、$y = m$ あるいは $y = M$ のときは $f(x) = y$ となる $x \in I$ が存在する。よって、ここからは $m < y < M$ とする。

まず、$p < q, J = [p,q]$ の場合を考える。$S = \{x \in J, f(x) \ge y\}$ とおく。I は有界区間で、$S \subset I$ だから、S は有界なので、下限 $r = \inf S$ をもつ。そこで、$f(r) = y$ となることを示す。

$f(q) = M > y$ だから、x が q に近いとき、$f(x) \ge y$ となるので、$r < q$ となる。

$u_n = r + 1/n$ とおくと、$u_n > r$ なので u_n は S の下限ではないから $r \le v_n \le u_n = r + 1/n$ となる $v_n \in S$ がとれる。このとき、はさみうちの原理より $v_n \to r$ だ

が、 $f(x)$ は連続だから $f(r) = \lim_{n\to\infty} f(v_n)$ となる。しかし、つねに $v_n \in S$ なので $f(v_n)$ はつねに y 以上となり、$f(r) \geq y$ であることがわかる。

そこで、$f(r) > y$ とならないことを示す。まず、$r > p$ となることを確かめる。$f(p) = m < y$ だから、x が p に近いとき、$f(x) < y$ となる。それで、たとえば $p \leq x \leq v$ のとき必ず $f(x) < y$ となる v がとれる。このとき、S の要素は v より大きくなければならないから、v が S の下界となる。よって、少なくとも $r \geq v > p$ となる。

よって、$r > p$ であるから、$p \leq x < r$ となる x で r に近いものがとれる。ここで $f(r) = z > y$ とすると、$p \leq x < r$ かつ、x が r に近いとき $f(x) > y$ となる。しかし、$x < r$ だから x は S に含まれず、$f(x) < y$ となる。これは矛盾である。

これによって、$f(r) = y$ でなければならないことが示された。よって、$p < q, J = [p, q]$ の場合、$f(x) = y$ となる x が存在することがいえる。

$p > q, J = [q, p]$ の場合は、$f(x)$ のかわりに $g(x) = f(-x)$ を考えると、$g(-a) = s, g(-b) = t$ となり、$I = [-a, -b]$ あるいは $I = [-b, -a]$ とおくと、$g(-q) = m$, $g(-p) = M$ は I における $g(x)$ の最小値と最大値となる。さらに $-q < -p$ であるから、先の議論を繰り返すことで、$g(x) = y$ となる x が存在することがいえる。

これらのことから、$s \leq y \leq t$ のとき、$f(x) = y$ となる x が存在することがいえる。