数列の極限と実数の連続性について補足

1　はじめに

数列の極限については、高等学校の数学 III で取り扱ったが、高等学校の数学 III の範囲内では、極限が（正または負の無限大に発散する場合も含めて）具体的に求められる場合、たとえば

$$\frac{1}{n}, n^2, \sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

あるいは

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

のような数列の極限は求められるが、

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \tag{1}$$

のような数列については、極限が存在するかどうかも確認することができない。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

については、二項定理を用いると

$$a_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\frac{1}{n^r}=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)<\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}$$

となることがわかるが、

$$r!=r\times(r-1)\times\cdots 2\times 1\geq 2^{r-1}$$

だから、

$$a_n<\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\leq 1+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{2^s}=3-2^{n-1}<3$$

となることがわかる。また、

$$a_{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} \frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-1}{n+1}\right) > a_n$$

となる。

一方、

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

については、

$$b_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

となることがわかる。また、

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)^2} > b_n$$

となる。

よって、これらの数列はともに、n とともに大きくなるが、a_n はつねに 3 より小さく、b_n はつねに 2 より小さい。そうなると、際限なく大きくなることはできないので、ひとつの値に収束するように思える。

しかし、この直観をどのように説明するか？そこで、実数の連続性という概念にたどりつくのである。

実数の連続性の数学的な表現の仕方は何通りか存在する。実数の連続性について詳しい議論は杉浦解析入門 I の第 1 章第 3 節のほか、ネット上で読めるテキストとしては、原隆氏の実数の構成に関するノート
https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/08/realnumbersv2.pdf などでなされている。

2　実数の連続性（Cauchy 列）

(1) で定まる数列 a_n, b_n が収束することをどのように示せばよいか？

b_n について考えると、この数列は単調増加するが、増加の速度は n が大きくなるにつれ急激に遅くなる。たとえば整数 M をひとつ定める。$m > n \geq M$ ならば、

$$0 < b_m - b_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{M}$$

より、$|b_m - b_n|$ はつねに $1/M$ より小さくなることが示される。そして、M が大きくなれば $1/M$ は 0 に近づくから、b_n は何かあるひとつの数に収束していると考えることができる。

言い換えると、$\epsilon > 0$ をどのようにとっても、M を $1/\epsilon$ より大きな整数としてとれば、$m > n \geq M$ のときはつねに、$|b_m - b_n| < \epsilon$ となる。

a_n についてはそれほど簡単ではないが、最終的に、正の数 $\epsilon > 0$ をどのようにとっても、M を十分大きくとれば、$m > n \geq M$ であるときつねに $|a_m - a_n| < \epsilon$ となることが確かめられる。

一般的に、$\epsilon > 0$ が小さな正の数であるとき、M をうまくとれば、$m > n \geq M$ であれば $|a_m - a_n| < \epsilon$ となるようにできるとき、a_n を **Cauchy 列**という。

例 1. π の小数展開を並べた数列

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \ldots$$

は（もちろん有理数からなる）*Cauchy* 列である。

この例における Cauchy 列はひとつの実数 $\pi = 3.1415926\cdots$ に収束している。そこで、一般的に、つぎの定理が成り立つと考えられる。

定理 1 (Cauchy 列の収束)**.** *Cauchy* 列は収束する。

Proof. 正の整数 r を任意にとって、小数点第 r 位までを確定させればよい。

N が大きいとき、$m \leq N$ ならば $|a_m - a_N| < 1/10^{r+1}$ となる。

$$a_N = K + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots$$

となる整数 K と整数 $0 \leq d_k \leq 9$ をとる。つまり a_N の小数点第 k 位を d_k とおく。

$1 \leq d_{r+1} \leq 8$ のときは、

$$a_m > a_N - \frac{1}{10^{r+1}} \geq K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r}{10^r} + \frac{d_{r+1} - 1}{10^{r+1}} \geq K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r}{10^r}$$

かつ

$$a_m < a_N + \frac{1}{10^{r+1}} \leq K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r}{10^r} + \frac{d_{r+1} + 1}{10^{r+1}} \leq K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r}{10^r} + \frac{9}{10^{r+1}}$$

より、$m \leq N$ ならば、a_m の小数点第 r 位までは a_N の小数点第 r 位までと一致し、さらに

$$K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r + 1}{10^r}$$

に近づくこともない。よって、小数点第 r 位までが $d_1, d_2, \ldots, d_r$ で確定する。

$d_{r+1} = 0$ のときは状況が複雑になる。a_N と同様にして

$$a_m = K_m + \frac{b_{m,1}}{10} + \frac{b_{m,2}}{10^2} + \cdots$$

とおく。このとき、つぎの 3 つの可能性がある。

1. ある $s > r$ と $m \geq N$ について
$$b_{m,r} = d_r, b_{m,r+1} = b_{m,r+2} = \cdots = b_{m,s-1} = 0, b_{m,s} \geq 1$$
となり、かつ、$\ell > m$ のとき $|a_\ell - a_m| < 10^{-s}$ となる。
2. ある $s > r$ と $m \geq N$ について
$$b_{m,r} = d_r - 1, b_{m,r+1} = b_{m,r+2} = \cdots = b_{m,s-1} = 9, b_{m,s} \leq 8$$
となり、かつ、$\ell > m$ のとき $|a_\ell - a_m| < 10^{-s}$ となる。
3. 任意の s について m が大きいとき
$$b_{m,r} = d_r, b_{m,r+1} = b_{m,r+2} = \cdots = b_{m,s} = 0$$
または
$$b_{m,r} = d_r - 1, b_{m,r+1} = b_{m,r+2} = \cdots = b_{m,s} = 9$$
となる。

1 の場合、$\ell \geq m$ のとき

$$K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r}{10^r} \leq a_\ell < K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r}{10^r} + \frac{1}{10^{r+1}}$$

となるから、小数点第 r 位までが $d_1, d_2, \ldots, d_r$ で確定する。

2 の場合、$\ell \geq m$ のとき

$$K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r - 1}{10^r} \leq a_\ell < K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r - 1}{10^r} + \frac{9}{10^{r+1}} + \cdots + \frac{9}{10^s}$$

となるから、小数点第 r 位までは

$$K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r - 1}{10^r}$$

の小数展開と一致する。

3 の場合、m が大きいとき

$$\left| a_m - \left(K + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_r}{10^r} \right) \right| \leq \frac{1}{10^s}$$

となるから、小数点第 r 位までが $d_1, d_2, \ldots, d_r$ で確定する。　□

また、つぎの事実は無限小数から実数をあらわす立場からは明らかだが、実数の連続性を取り扱う上で必要である。

定理 2 (Archimedes の原理)**.** 任意の 2 つの正の実数 $a, b > 0$ について、$na > b$ となる自然数 n が存在する。

Cauchy 列の収束と Archimedes の原理がともに成立することが実数の連続性のひとつの表現となっている。

ところで、講義中では実数を無限小数によって定義し、上の証明でも無限小数展開を利用して Cauchy 列が収束することを証明した。一方、先ほどの例では Cauchy 列は無限小数 $3.14159\cdots$ をあらわしているとみることができる。そこで、無限小数をつかわずに、有理数の Cauchy 列によって実数を定義することもできる。この場合にも有理数の Cauchy 列を利用して、実数の Cauchy 列が収束することを証明することができる。有理数の Cauchy 列として実数を定義する方法の詳細はたとえば原隆氏の前述のノートの第 3 節を参照されたい。

3 実数の連続性（上限と下限）

実数の連続性のもうひとつの考え方は、上限と下限によるものである。

実数の集合 S について、S のどの要素も B 以下となる、つまり $x \in S$ ならば必ず $x \leq B$ となる実数 B が存在するとき、S は**上に有界**であるといい、B を S の**上界**という。

これに対して、実数の集合 S について、S のどの要素も B 以上となる、つまり $x \in S$ ならば必ず $x \geq B$ となる実数 B が存在するとき、S は**下に有界**であるといい、B を S の**下界**という。

例 2. $S = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ とおくと、S のどの要素も 1 以下であるから、1 は S の上界である。同様に、S のどの要素も正であるから、0 は S の下界である。

注意しなければならないのは、上界や下界は一意的に定まるものではないということである。たとえば、先ほどの例の場合、2 や 3 も S の上界であるし、-1 や -10 も S の下界である。一般に、この例ならば 1 以上の実数ならば何でも S の上界であるし、0 以下の実数ならば何でも S の下界である。

一方で、上界のなかで最も小さいものがあるとすれば、それは一意的に定まらなければならない。下界のなかで最も大きいものがあるとすれば、やはりそれは一意的に定まらなければならない。先ほどの例の場合、S の最小の上界は 1 であり、最大の下界は 0 であることがわかる。

一般的には、空でない実数の集合について上界があれば、そのうち最も小さいものが必ず存在するというのが実数の重要な性質のひとつである。

定理 3 (Weierstrass の実数の連続性公理)**.** 空でない実数の集合 S が上界をもつならば、そのような上界のなかで最小のものが存在する。同様に、空でない実数の集合 S が下界をもつならば、そのような下界のなかで最大のものが存在する。

そこで、S の最小の上界を**上限**といい、$\sup S$ であらわすことにし、S の最大の下界を**下限**といい、$\inf S$ であらわすことにする。なお、空でない、と書いたのは、任意の数が空集合の上界かつ下界となるからである。

それで、先ほどの例の場合、S の上限は 1 で下限は 0 となる。これは最大値と最小値に似ているが、1 は確かに S の最大値であるが、0 は S に含まれないから最小値とはならない。一般に、実数の集合が上に有界であっても最大値をもつとは限らず、下に有界であっても最小値をもつとは限らないのである。

また、上の定理は上限や下限が存在することは言っているが、それが具体的にどのようなものかは述べていないことにも注意しなければならない。上限や下限が存在することはわかっても、それだけでは上限や下限が具体的にどのような数かは多くの場合、見えてこないのである。

数列 a_n についても、$\{a_0, a_1, \ldots\}$ を集合とみることで、同じ様に有界、上界、下界、上限、下限の概念を定義することができる。それで、(1) で定まる数列についていえば、3 は a_n の上界のひとつで、2 は b_n の上界のひとつである。とくに、これらの数列は上に有界である。

さらに、先にも述べたように、a_n, b_n はいずれも単調増加な数列である。先程の実数の連続性から、こうした数列が収束することが言えるのである。

定理 4. a_n が上に有界で広義単調増加な数列であるとき、a_n は $\sup a_n$ に収束する。同様に、a_n が下に有界で広義単調減少な数列であるとき、a_n は $\inf a_n$ に収束する。

Proof. a_n が上に有界で広義単調増加な数列であるとき、$A = \sup a_n$ とおくと、$a_n < A$ である。一方、$B < A$ となる任意の実数 B をとると、B は a_n の上界ではなくなる。よって、$B < a_M$ となる整数 M が存在する。a_n は広義単調増加だから、$n \geq M$ ならば $B < a_n < A$ となる。B は A にいくらでも近いものがとれるから、n が大きいとき a_n は A に近づいていく。

よって a_n が上に有界で広義単調増加な数列であるとき、a_n は $\sup a_n$ に収束することがわかる。同様にして、a_n が下に有界で広義単調減少な数列であるとき、a_n は $\inf a_n$ に収束することが示せる。 □

これによって、(1) で定まる数列が収束することが示せたわけである。

さて、Weierstrass の実数の連続性公理であるが、定理として紹介したが、これを証明しようとすると、別の実数の連続性が必要となってしまう。たとえば前節の Cauchy 列の収束を利用すると、つぎのように証明できる。

1. S の要素をひとつとり、それを u_0 とする。u_0 が S の上界ならば、u_0 自身が S の上限となる。
2. u_0 が S の上界でないとき、S の上界をひとつとり、それを v_0 とする。このとき $u_0 < v_0$ となる。$w = (u_0 + v_0)/2$ とおく。
3. w が S の上界ならば、$u_1 = u_0, v_1 = w$ とおくと、$u_1 < w \leq v_1$ で、u_1 は S の上界ではないが、v_1 は S の上界である。
4. w が S の上界でないとき、$u_1 = w, v_1 = v_0$ とおくと、$u_1 = w < v_1$ で、u_1 は S の上界ではないが、v_1 は S の上界である。
5. u_n, v_n が定まり、u_n は S の上界ではなく、v_n は S の上界であるとする。このとき $w = (u_n + v_n)/2$ とおく。
6. w が S の上界ならば、$u_{n+1} = u_n, v_{n+1} = w$ とおく。w が S の上界でないとき、$u_{n+1} = w, v_{n+1} = v_n$ とおく。いずれの場合も、u_{n+1} は S の上界ではないが、v_{n+1} は S の上界で、$u_n \leq u_{n+1} < v_{n+1} \leq v_n$ かつ $v_{n+1} - u_{n+1} = (v_n - u_n)/2$ となる。
7. 5, 6 をくり返すと、u_n は広義単調増加、v_n は広義単調減少数列で、u_n はいずれも S の上界ではなく v_n はいずれも S の上界である。また、つねに $u_m < v_n$ となる（m, n は別々にとってよい）。さらに、$v_n - u_n = (v_0 - u_0)/2^n$ となる。
8. よって、$m > n \geq N$ のとき、$0 < u_m - u_n < v_N - u_N = (v_0 - u_0)/2^N$ かつ $0 > v_m - v_n > u_N - v_N = (u_0 - v_0)/2^N$ となるから、u_n, v_n はそれぞれ Cauchy 列であるから、収束する。
9. $v_n - u_n = (v_0 - u_0)/2^n$ は 0 に近づいていくから、u_n, v_n は共通の極限 s に収束する。
10. s は S の上界である。というのは、s が S の上界でないとすると、$x > s$ となる $x \in S$ が存在するが、v_n は s に収束するから、$x > v_m$ となる m が存在する。しかし、これは 7. に矛盾する。
11. s は S の最小の上界である。というのは、$t < s$ が S の上界とすると、u_n は s に収束するから $u_n > t$ となる u_n が存在するが、7. より u_n は S の上界ではないので $x > u_n > t$ となる $x \in S$ が存在する。これは矛盾である。
12. 11. より、s は S の上限となる。

なお、ここで $(v_0 - u_0)/2^n$ が 0 に近づいていくと書いたが、このことは自明ではなく、Archimedes の原理から従う。

一般に、u_n が広義単調増加、v_n が広義単調減少な数列で、つねに $u_m \leq v_n$ となり、かつ $v_n - u_n$ が 0 に収束するとき u_n, v_n は共通の極限に収束する。この議論を**区間縮小法**という。

これと逆に、上に有界で広義単調増加な数列が収束することから、Cauchy 列の収束と Archimedes の原理を示すこともできる。杉浦解析入門 I の第 1 章の定理 3.2, 3.6 を参照。