第5回・第6回講義補足

1　関数の増減についての補足

$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で、(a,b) において $f'(x) \geq 0$ （あるいは $f'(x) > 0$）となるとき $f(x)$ は $[a,b]$ で（狭義）単調増加となることについては講義で解説したが、逆のこともいえる。

定理 1. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) において微分可能で、$[a,b]$ で単調増加となるとき、(a,b) で $f'(x) \geq 0$ となる。

Proof. $a < t < b$ とし、$t+h < b$ となる正の実数 h をとると、$f(t+h) > f(t)$ だから、$f(t+h) - f(t)/h > 0$ となる。よって、

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \geq 0.$$

□

また、$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で、(a,b) において $f'(x)$ が（狭義）単調増加であるとき $f(x)$ は $[a,b]$ で（狭義で）下に凸となることについては講義で解説したが、やはり、次のように逆のこともいえる。

定理 2. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) において微分可能で、$[a,b]$ で（狭義で）下に凸となるとき、(a,b) で $f'(x)$ が（狭義）単調増加となる。

Proof. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) において微分可能で、$[a,b]$ で（狭義で）下に凸となるとする。$a \leq x < y \leq b$ となる x, y をとる。このとき

$$f'(x) < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{1}$$

が成り立つ。実際、$x < x+h < y$ となる実数 h をとると、

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \frac{f(y) - f(x+h)}{y - (x+h)}$$

となるから

$$(y-(x+h))(f(x+h)-f(x)) < h(f(y)-f(x+h))$$

つまり

$$\begin{aligned}(y-x)(f(x+h)-f(x)) &< h(f(y)-f(x+h)+f(x+h)-f(x)) \\ &= h(f(y)-f(x))\end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

となる。$h_0 = (y-x)/2$ とおくと、

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(x+h_0)-f(x)}{h_0} < \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

となるから、(1) が成り立つ。

同様にして

$$f'(y) > \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \tag{2}$$

も成り立つから、$f'(x) < f'(y)$ が成り立つ。 □

なお、上に凸であることを、**凹**であるともいう。単調減少関数および凹関数についても、上と同様にして、つぎのことがいえる。

定理 3. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) において微分可能で、$[a,b]$ で単調減少となるとき、(a,b) で $f'(x) \leq 0$ となる。

定理 4. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続かつ (a,b) において微分可能で、$[a,b]$ で（狭義で）凹となるとき、(a,b) で $f'(x)$ が（狭義）単調減少となる。

2　Taylor 級数の収束についての補足

Taylor 展開によってあらわされる級数

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f'(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

はつねに収束するとは限らない。一般的に

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots \tag{3}$$

とあらわされる級数は収束するとは限らない。たとえば

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!(x-c)^k$$

は $x \neq c$ のとき、つねに発散する。(3) であらわされる級数の収束と発散は、つぎのように $|x-c|$ から定まる。

定理 5. $b_n = \left|a_n^{-1/n}\right|$ とおく。「n が大きいとき $b_n \geq C$ となる」という性質をもつ C の上限を R とおく。このとき、(3) であらわされる級数は $|x-c| > R$ のとき発散し、$|x-c| < R$ のとき収束する。

Proof. $|x-c| < R$ のとき、$r = |x-c|$ とおくと、n が大きいとき $b_n \geq r$ となる。$|a_n| = b_n^{-n} \leq 1/r^n$ だから、n が大きいとき $|a_n(x-c)^n| < (r/R)^n$ となる。$r/R < 1$ なので、(3) であらわされる級数は収束する。

一方、$|x-c| > R$ のとき、$r = |x-c|$ とおくと、「n が大きいとき $b_n \leq r$ となる」が成立しない。つまり $b_n < r$ となる b_n で、n がいくらでも大きいものが存在する。$|a_n| = b_n^{-n} > 1/r^n$ だから、$|a_n(x-c)^n| > 1$ となる n でいくらでも大きいものが存在する。よって (3) であらわされる級数は収束しない。 □

この R を (3) の**収束半径**という。$|x-c| = R$ のときは、この定理だけでは判定できない。

なお、定理にあらわれる「n が大きいとき $b_n \geq C$ となる」という性質をもつ C の上限を数列 (b_n) の**上極限**といい、$\limsup_{n\to\infty} b_n$ によりあらわす。また、これに対して、「n が大きいとき $b_n \leq C$ となる」という性質をもつ C の下限を数列 (b_n) の**下極限**といい、$\liminf_{n\to\infty} b_n$ によりあらわす。

数列 (u_n) の上極限および下極限は、それぞれ (u_n) の収束する部分列の極限値の最大値および最小値と一致する。

例 1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

は、任意の実数 x について e^x に収束するので、収束半径は ∞ である。

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

は、$|x| < 1$ のとき $1/(1-x)$ に収束するが、$|x| \geq 1$ のとき収束しないので、収束半径は 1 である。一方

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

は、$|x| < 1$ のとき $\log(1 + x)$ に収束し、$|x| > 1$ のとき収束しないので、収束半径は 1 であるが、$x = -1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

はやはり発散する一方、$x = 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

は $\log 2$ に収束する。