微分積分1（山田／火1）第1回 (4/11) 講義概要

1　数列の極限

数列の極限については、連続関数の性質を論じる上で必要な範囲に限り、実数の連続性との関連で取り上げる。四則や根号、等比数列や等比級数などを用いてあらわされる数列の極限（正または負の無限大に発散する場合も含めて）の具体的な計算については高等学校の数学 III で取り扱い済みなので省略する。また、極限の厳密な定義についても省略する（教科書の付録を参照）。

具体的には、数列の極限について、つぎの 2 つの性質について取り扱う。

- 有界（一定の値 a, b があって、その数列のどの要素も a と b の間にあることをいう）な単調増加数列はつねに収束する。
- （Bolzano-Weierstrass の定理）有界な数列は収束する部分列をもつ。

実はこの両者はともに本質的には同じことを言っており、この性質を実数の連続性と言う（教科書の付録を参照）。この性質を用いて、たとえば $(1+1/n)^n$, $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ といった重要な数列が収束することを示す。

2　関数の極限

有理関数や三角関数の極限の計算の方法は数学 III で取り扱い済なので省略する。ただ、三角関数の極限 $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x$ については、円の面積を用いる計算方法は循環論法になることに注意を要する（厳密に示そうとすると、実質的に積分法を用いる必要がある）。

関数の極限の基本的な性質について再確認し、高等学校では厳密な証明を学習しない定理についてもある程度詳しく議論しつつ、極限とは何かを説明する。

　さらに、関数の極限を用いて、関数が連続であるとはどういうことか定義し、数列の極限で扱った実数の連続性を利用して連続関数に関する最大値・最小値の定理や中間値の定理について説明する。