微分積分 1 第 7 回課題解答

0 第 7 回課題の解答について

第 7 回課題の厳密な解を示す。

1) については $1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \cdots$ を積分する際には、無限和の項別積分が可能か否か検討する必要があるので注意されたい。

2) についてはこのような厳密な議論をしなくても、図によって開閉と連結か否か、有界か否かが明らかにされていれば正解とした。

1 1) 解答

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{2k+1}}{2k+1}\right) - \arctan x \tag{1}$$

とおくと

$$f_n'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-x)^{2k}\right) - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+(-x)^{2(n+1)}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(-x)^{2(n+1)}}{1+x^2} \tag{2}$$

なので $x \geq 0$ のとき $f_{2m}'(x) \geq 0, f_{2m+1}'(x) \leq 0 (m = 0, 1, \ldots)$ が成り立つ。$f_n(0) = 0$ だから、$x \geq 0$ のとき $f_{2m}(x) \geq 0, f_{2m+1}(x) \leq 0 (m = 0, 1, \ldots)$ が成り立つ。よって $m = 0, 1, \ldots$ に対し

$$f_{2m}(1) = \left(\sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right) - \frac{\pi}{4} \geq 0 \tag{3}$$

かつ

$$f_{2m+1}(1) = \left(\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right) - \frac{\pi}{4} \leq 0 \tag{4}$$

だから

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} \leq \frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} \tag{5}$$

が成り立つ。$m \to \infty$ の極限をとって $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}$ がわかる。

2 2a) 解答

$S = \{|x| + |y| \leq 2\}$ とおく。

$P(a,b) \notin S$ ならば $|a| + |b| = 2 + \delta, \delta > 0$ となる実数 δ がとれる。$Q(x,y) \in U(P, \delta/2)$ ならば $|x| + |y| > (a - \delta/2) + (b - \delta/2) = a + b - \delta = 2$ より $U(P, \delta/2)$ は S と共通部分を持たないので $Q \notin \partial S$ である。このことは $\partial S \subset S$ であることを意味する。つまり S は閉集合である。

$P(a,b) \in S$ ならば $|a|, |b| \leq 2$ なので $\overline{OP} \leq 2\sqrt{2}$ である。よって S は有界。

また線分 OP 上の点 $R(ta, tb)(0 \leq t \leq 1)$ をとると $|ta| + |tb| = t(|a| + |b|) \leq 2t \leq 2$ より $R \in S$ なので線分 OP は S に含まれる。2 点 $P, Q \in S$ をとれば 線分 OP, OQ はともに S に含まれるのでこの線分に沿って P から Q に至る道がとれる。よって S は連結。

3 2b) 解答

$S = \{xy < 1\}$ とおく。

$P(a,b) \in S, a, b \geq 0$ ならば $ab = 1 - \delta, \delta > 0$ となる実数 δ がとれる。

$0 < t < \min\{2(a+b)^2, \delta\}$ となる実数 t をとる。

$$\left(a + \frac{t}{2(a+b)}\right)\left(b + \frac{t}{2(a+b)}\right) = ab + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4(a+b)^2} < ab + \frac{t}{2} + \frac{t}{2} < ab + \delta \quad (6)$$

である。$ab + \delta < 1$ なので $\overline{PQ} < t$ ならば $Q \in S$ となる、つまり $U(P,t) \subset S$ であることがわかる。よって P は S の内点である。同様にして $P(a,b) \in S, a, b \leq 0$ も S の内点である。また $P(a,b) \in S, a > 0, b < 0$ ならば $t = \min\{a, |b|\}$ とおくと $U(P,t) \in S$ である。というのは $Q(x,y) \in U(P,t)$ ならば $x > a - t \geq 0, y < b + t \leq 0$ より $xy < 0$ となるからである。よって、やはり $P(a,b) \in S, a > 0, b < 0$ は S の内点である。同様にして $P(a,b) \in S, a < 0, b > 0$ も S の内点である。これらのことから S は開集合である。

任意の $t > 0$ に対し $P(t, 0) \in S$ であるから S は有界ではない。

また線分 OP 上の点 $R(ta, tb)(0 \leq t \leq 1)$ をとると $ab < 0$ のとき $tatb = t^2ab < 0$、$ab \geq 0$ のとき $tatb = t^2ab \leq ab < 1$ より $R \in S$ なので線分 OP は S に含まれる。2 点 $P, Q \in S$ をとれば 線分 OP, OQ はともに S に含まれるのでこの線分に沿って P から Q に至る道がとれる。よって S は連結。