第1回・第2回課題の解

1　第1回目の課題

a)

$$\int 4x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}dx = 4\times\frac{x^4}{x}+\frac{x^2}{2}+\log x+4\times\frac{1}{(-2)x^2}+C = x^4+\frac{x^2}{2}+\log x-\frac{2}{x^2}+C.$$

b) $y = x^2$ とおくと $dy/dx = 2x$ なので

$$\int xe^{x^2}dx = \int \frac{e^y}{2}dy = \frac{e^y}{2} + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

c) $F(x) = x, g(x) = \log x$ とおくと $F'(x) = 1, g'(x) = 1/x$ なので

$$\begin{aligned}\int \log x dx =& \int F'(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx \\ =& x\log x - \int 1dx = x\log x - x + C.\end{aligned}$$

d) $y = \log x$ とおくと $dy/dx = 1/x$ なので

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \int y(dy/dx)dx = \int ydy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{\log^2 x}{2} + C.$$

2　第2回目の課題

1a)

$$\int_0^1 6x^2 + 4x + 2 + \frac{1}{x+1}dx = [2x^3 + 2x^2 + 2x + \log(x+1)]_0^1 = 6 + \log 2.$$

1b)

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y e^{-x}dx = \lim_{y\to+\infty}[-e^{-x}]_0^y = \lim_{y\to+\infty}(1 - e^{-y}) = 1.$$

2a) $x_k = k/n (0 \leq k \leq 2n)$ とおくと $x_0 = 0, x_{2n} = 2$ かつ $x_{k+1} - x_k \to 0 (n \to \infty)$ だから

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{2n}\sqrt{x_k}(x_k - x_{k-1}).$$

$\sqrt{x}$ は $0 \leq x \leq 2$ で連続なので、$n \to \infty$ としたときの右辺の極限値は $\int_0^2 \sqrt{x}dx$ に一致する。よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^2 \sqrt{x}dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = \frac{2}{3}(2^{3/2} - 0^{3/2}) = \frac{2^{5/2}}{3}.$$

2b) $x_k = 1 + k/n (0 \leq k \leq n)$ とおくと $x_0 = 1, x_n = 2$ かつ $x_{k+1} - x_k \to 0 (n \to \infty)$ だから

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 (x_k - x_{k-1}).$$

x^2 は $1 \leq x \leq 2$ で連続なので、$n \to \infty$ としたときの右辺の極限値は $\int_1^2 x^2 dx$ に一致する。よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3 - 1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$