第3回・第4回課題の解

1　第3回目の課題

a) $y = x^2$ とおくと $dy/dx = 2x$ なので

$$\int_0^2 xe^{-x^2}dx = \int_0^2 (e^{-x^2}/2)(2x)dx = \int_0^4 e^{-y}/2dy = [-e^{-y}/2]_0^4 = (1-e^{-4})/2.$$

b) $y = x^2$ とおくと $dy/dx = 2x$ なので

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{4-y}}dy = \left[-\sqrt{4-y}\right]_0^1 = 2-\sqrt{3}.$$

c) $F(x) = x^2/2, g(x) = \log x$ とおくと $F'(x) = x, g'(x) = 1/x$ なので

$$\begin{aligned}\int_1^e x\log x dx = \int_1^e F'(x)g(x)dx &= [F(x)g(x)]_1^e - \int_1^e F(x)g'(x)dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

d) $F(x) = -e^{-x}, g(x) = x$ とおくと $F'(x) = e^{-x}, g'(x) = 1$ なので、c) と同様に

$$\begin{aligned}\int_0^y xe^{-x}dx =& [-xe^{-x}]_0^y - \int_0^y -e^{-x}dx \\ =& -ye^{-y} + \int_0^y e^{-x}dx = -ye^{-y} + 1 - e^{-y}.\end{aligned}$$

ここで $h(x) = x^2e^{-x}$ とおくと $h'(x) = x(2-x)e^{-x}$ なので $y \geq 0$ のとき $0 \leq y^2e^{-y} \leq 4/e^2$ である。よって $y \geq 0$ のとき $0 \leq ye^{-y} \leq (4/e^2)/y$ であるから $e^{-y}, ye^{-y} \to 0 (y \to +\infty)$ であることがわかる。よって

$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^y xe^{-x}dx = 1.$$

2　第 4 回目の課題

1a) $u = \tan(x/2)$ とおくと $\cos^2(x/2) = 1/(1+u^2), \cos x = 1 - 2\cos^2(x/2) = (1-u^2)/(1+u^2), \tan x = 2u/(1-u^2)$ より $\sin x = 2u/(1+u^2)$ である。また $du/dx = 1/(2\cos^2(x/2)) = (1+u^2)/2$ であるから

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1-\sin x} &= \int \frac{2}{1+u^2}\frac{du}{1-\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{1+u^2-2u} \\ &= \int \frac{2du}{(1-u)^2} = \frac{2}{1-u} + C = \frac{2}{1-\tan(x/2)} + C.\end{aligned}$$

1b)

$$\begin{aligned}\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-2} &= \frac{(ax+b)(x-2)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+c)x^2+(b-2a)x+c-2b}{(x^2+1)(x-2)}\end{aligned}$$

より

$$\frac{x+5}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{-7x-9}{5(x^2+1)} + \frac{7}{5(x-2)},$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{(x^2+1)(x-2)}dx &= \int \frac{-7x-9}{5(x^2+1)} + \frac{7}{5(x-2)}dx \\ &= -\int \frac{7xdx}{5(x^2+1)} - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{7}{10}\int \frac{dy}{y} + \frac{-9\arctan x + 7\log(x-2)}{5} \\ &= \frac{-7\log(x^2+1) - 18\arctan x + 14\log(x-2)}{10} + C.\end{aligned}$$

2a) $I_n = \int \tan^n x dx$ とおくと

$$I_n + I_{n-2} = \int \tan^{n-2} x(1+\tan^2 x)dx = \int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x}dx$$

だが $y = \tan x$ とおくと

$$\int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x}dx = \int y^{n-2}dy = \frac{y^{n-1}}{n-1} + C = \frac{\tan^{n-1}}{n-1} + C$$

だから

$$I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1}}{n-1} + C$$

である。よって

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} x dx = \left[\frac{\tan^{n-1}}{n-1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n-1}$$

であるから

$$\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \int_0^{\pi/4} dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}.$$