第5回課題の解

1a) $y = x^2, y = 4 - x^2$ のグラフは $(\pm\sqrt{2}, 2)$ で交わり、$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ のとき $4 - x^2 \geq x^2$ であるから

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4 - 2x^2 dx = \left[4x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

1b) $x^2 \leq y \leq 4 - x^2$ を x 軸の周りに回転させた図形は yz 平面上半径 $4 - x^2$ の円板から半径 x^2 の円板を繰り抜いた図形となる。その面積は $\pi((4-x^2)^2 - (x^2)^2) = \pi(16 - 8x^2)$ であるから回転体の体積は

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi(16 - 8x^2)dx = \pi\left[16x - \frac{8x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 32\sqrt{2}\pi - \frac{32\sqrt{2}\pi}{3} = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}.$$

2) $\log x$ は単調増加関数なので $x \geq 2$ に対して

$$\log x \geq \int_{x-1}^{x} \log t dt$$

が成り立つ。よって

$$\log(n!) = \sum_{k=2}^{n} \log n \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \log t dt = \int_{1}^{n} \log t dt = n\log n - n + 1$$

であるから

$$n! \geq e^{n\log n - n + 1} = \frac{n^n}{e^{n-1}} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$