微分積分3 第6回課題解説

1 課題

1) 次の広義積分が存在するか確かめ、存在するときはその値を求めよ。

a) $\int_0^1 \log x dx$, b) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

2) （11/15訂正）ベータ関数 $B(p,q)$ について $B(1/2,1/2)=\pi$ を示せ（$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ を用いるとよい。なお $B(1/2,1/2)=\Gamma^2(1/2)$ つまり $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ であることが知られているが、その証明は通常は 2 変数関数の積分が必要となる）。

2 解

1a) まず

$$\int_t^1 \log x dx = [x\log x]_t^1 - \int_t^1 dx = t-1-t\log t \tag{1}$$

が成り立つ。$u=1/t$ とおくと

$$\lim_{t\to+0} t\log t = \lim_{u\to+\infty} -\frac{\log u}{u}, \tag{2}$$

さて $f(u)=(\log^2 u)/u$ とおくと $f'(u)=(2\log u-\log^2 u)/u$ より $u>0$ において $f(u)\le f(e^2)=4/e^2$ であるから $0<(\log^2 u)/u<4/e^2$、つまり $u>1$ において $0<\log u/u<4/(e^2u)$ となる。よって (2) の極限値は 0 である。したがって (1) より

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{t\to+0}(t-1-t\log t) = -1 \tag{3}$$

であることがわかる。

1b)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+x^2} =& \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx \\ =& \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}\right)\end{aligned}$$

となるので $1/(1+x^2)^2$ の不定積分は

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan x}{2} + C$$

となる。よって

$$\int_0^t \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2} \tag{4}$$

となる。$-\pi/2 < \theta < \pi/2$ において $\theta \to \pi/2 - 0$ とするとき $\tan\theta \to +\infty$ だから $\lim_{t\to\infty} \arctan t = \pi/2$ である。よって

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4} \tag{5}$$

となる。

2)

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \tag{6}$$

である。$0 < a < b < 1$ のとき $u = 2t - 1$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} &= \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2}} = 2\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1 - (1-2t)^2}} \\ &= \int_{2a-1}^{2b-1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(2b-1) - \arcsin(2a-1)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} &= \lim_{a\to+0, b\to 1-0} \arcsin(2b-1) - \arcsin(2a-1) \\ &= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi\end{aligned}$$

である。これを (6) に代入して

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi \tag{7}$$

を得る。