微分積分3 第7回課題解説

1　課題

1) $\lim_{x\to 0}\Gamma(x)\sin(2\pi x)$ を求めよ（$x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ となることを使うとよい）。

2) $N>1$ は自然数とする。また $p\le N$ に関する和および積は N 以下のすべての素数に関する和および積とする。

   a) $x>0$ のとき $\log(1+x)<x$ となることを示せ。

   b) $e=e(p)$ を $p^e>N$ となる最小の整数とする。

$$\sum_{p\le N}\log\frac{p}{p-1}>\sum_{p\le N}\log\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)>\log\log N$$

   を示せ（まず $\prod_{p\le N}\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)\ge\sum_{k=1}^N\frac{1}{k}$ となることを確かめよ）。$\sum_{k=1}^N\frac{1}{k}>\log N$ は講義中に取り扱ったので証明しなくてもよい。

   c) $\sum_{p\le N}\frac{1}{p}>(\log\log N)-1$ となることを示せ（とくにすべての素数の逆数の和は発散する）。

3) （11/24 訂正） $\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{2n-1}\frac{kl}{mn}$ を求め、累次積分を使わずに対応する多重積分を計算せよ（対応する多重積分が値をもつことは証明しなくてもよい）。

2　解

1) $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ なので $x\to 0$ のとき

$$\Gamma(x)\sin(2\pi x)=\frac{\sin(2\pi x)\Gamma(x+1)}{x}=\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}\times 2\pi\Gamma(x+1)\to 2\pi\Gamma(1)=2\pi.$$

2) a) $x>0$ のとき $(\log(1+x)-x)'=\frac{1}{1+x}-1<1$ だから $\log(1+x)-x$ は $x>0$ で単調増加なので $\log(1+x)-x<\log 1=0$、あるいは $\log(1+x)=\int_0^1\frac{dx}{x}<\int_0^1 dx=1$ など。

b) はじめの不等号は

$$1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}=\frac{1-\frac{1}{p^{e+1}}}{1-\frac{1}{p}}<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}$$

より成り立つ。二つ目の不等号についてであるが、まず

$$\sum_{p\le N}\log\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)=\log\prod_{p\le N}\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)$$

が成り立つ。右辺の積

$$\prod_{p\le N}\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)$$

を展開すると、 $\frac{1}{p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_r^{f_r}}$、 $p_i\le N, f_i\le e(p_i)(i=1,2,\ldots,r)$ の形のすべての項があらわれる。よって分母には N 以下のすべての正の整数があらわれるから

$$\prod_{p\le N}\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)\ge\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}>\log N$$

が成り立つので

$$\sum_{p\le N}\log\frac{p}{p-1}>\sum_{p\le N}\log\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)>\log\log N$$

がいえる。

c) まず

$$\sum_{p\le N}\frac{1}{p}=\sum_{p\le N}\frac{1}{p-1}-\sum_{p\le N}\frac{1}{p(p-1)}$$

が成り立つが、a) で示したことから $\log(1+x)<x$ より

$$\sum_{p\le N}\frac{1}{p-1}>\sum_{p\le N}\log\frac{p}{p-1}>\log\log N$$

となり、さらに

$$\sum_{p\le N}\frac{1}{p(p-1)}\le\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{N}<1$$

であるから

$$\sum_{p\le N}\frac{1}{p}>(\log\log N)-1$$

が成り立つ。

3)

$$\frac{1}{mn}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{2n-1}\frac{kl}{mn} = \frac{1}{(mn)^2}\left(\sum_{k=0}^{m-1} k\right)\left(\sum_{l=0}^{2n-1} l\right) = \frac{m(m-1)2n(2n-1)}{4(mn)^2}$$

より

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{2n-1}\frac{kl}{mn} = \lim_{m,n\to\infty}\frac{m(m-1)2n(2n-1)}{4(mn)^2} = 1$$

である。$x_k = \frac{k}{m}(0 \leq k \leq m), y_l = \frac{l}{n}(0 \leq l \leq 2m)$ とおくと $D_{k,l} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$ は $[0,1] \times [0,2]$ の細分となり、各 $D_{k,l}$ の面積は $\frac{1}{mn}$ に一致するから上記の左辺の極限は多重積分 $\iint_{0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2} 1dxdy$ に（そのような多重積分が存在するならば）一致する。よって

$$\iint_{0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2} 1dxdy = \lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{2n-1}\frac{kl}{mn} = 1$$

が成り立つ。