2変数関数の積分その他(11/24訂正)

0 Web会議

ZOOM https://kobe-u-ac-jp.zoom.us/j/84564509089?pwd=cXpTQ3ZuS2lMSFh4aGFEbnl4MHNxUT09

1 学習内容の概略

1.1 ガンマ関数とベータ関数（つづき）

- ベータ関数 $B(p,q)$…二項係数の一般化、$B(p,q)=\int_0^1 t^{1-p}(1-t)^{1-q}dt$

1.2 課題の解説と雑感

多変数関数の積分の導入に先立って課題に関する解説及び採点の雑感を述べる。

1.3 多変数関数の積分の導入

参考 序論 8.1-8.2, Lang, *Functions of Several Variables*, Chap. IX. 1-2

- 多変数関数のリーマン和…小領域に分割
- 最大値・最小値の原理…有界閉領域で連続関数は最大値・最小値をもつ
- 多重積分…リーマン和により定義する、連続関数ならば定まる
- 累次積分…1 変数ずつ積分する、連続関数ならば多重積分と一致する

2　課題

11/29 までに BEEF に提出し、「微分積分 4」履修者はそのときに微分積分 4 の第 1 回の学習指示書をダウンロードされたい。多変数関数の積分についてより詳しくは、「微分積分 4」で出題する。

1) $\lim_{x\to 0}\Gamma(x)\sin(2\pi x)$ を求めよ（$x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ となることを使うとよい）。

2) $N>1$ は自然数とする。また $p\le N$ に関する和および積は N 以下のすべての素数に関する和および積とする。

   a) $x>0$ のとき $\log(1+x)<x$ となることを示せ。

   b) $e=e(p)$ を $p^e>N$ となる最小の整数とする。

   $$\sum_{p\le N}\log\frac{p}{p-1}>\sum_{p\le N}\log\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)>\log\log N$$

   を示せ（まず $\prod_{p\le N}\left(1+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^e}\right)\ \ge\ \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$ となることを確かめよ）。$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}>\log N$ は講義中に取り扱ったので証明しなくてもよい。

   c) $\sum_{p\le N}\frac{1}{p}>(\log\log N)-1$ となることを示せ（とくにすべての素数の逆数の和は発散する）。

3) （11/24 訂正）$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{2n-1}\frac{kl}{mn}$ を求め、累次積分を使わずに対応する多重積分を計算せよ（対応する多重積分が値をもつことは証明しなくてもよい）。

3　その他

今回の講義の内容に関する質疑は BEEF「第 7 回目の内容に関する質疑応答」に、講義全般に関する意見要望は「ご意見・ご要望」に投稿されたい。