微分積分4 第1回課題解説

1 課題

1) 次の二重積分を求めよ。

   a) $\int_{y\geq 0, y\leq x, x+y\leq 4} x(4-y)dxdy$

   b) $\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy.$

2) 3つの平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ と曲面 $z=8-x^2-y$ で囲まれた部分の体積を求めよ。

2 解

1a)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_0^x x(4-y)dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} x(4-y)dydx \\
=&\int_0^2 4x^2 - \frac{x^3}{2}dx + \int_2^4 4x(4-x) - \frac{x(4-x)^2}{2}dx \\
=&\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_0^2 + \int_2^4 8x - \frac{x^3}{2}dx = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_0^2 + \left[4x^2 - \frac{x^4}{8}\right]_2^4 \\
=&\frac{32}{3} - 2 + (48-30) = 16 + \frac{32}{3} = \frac{80}{3}
\end{aligned}
$$

あるいは

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \int_y^{4-y} x(4-y)dxdy &= \int_0^2 \frac{(4-y)^3}{2} - \frac{y^2(4-y)}{2}dy \\
&= \int_0^2 (4-y)(-4y+8)dy \\
&= \int_0^2 4y^2 - 24y + 32dy \\
&= \left[\frac{4}{3}y^3 - 12y^2 + 32y\right]_0^2 \\
&= \frac{32}{3} - 48 + 64 = \frac{80}{3}.
\end{aligned}
$$

1b) $y = a\sin\theta, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy =& \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(a\cos\theta)\sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}d\theta \\ =& a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta\end{aligned}$$

だが

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

だから

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy = \frac{a^2\pi}{2}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy =& \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}dy\right)dx \\ =& \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)\pi}{2}dx \\ =& \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

x, y はともに負の数もとることに注意する。

2) $z \le 0$ だから各 x, y について z は $0 \le z \le 8 - x^2 - y$ の範囲を動く。よって体積は

$$\begin{aligned}\int_{x,y\ge 0, x^2+y\le 8} 8-x^2-ydxdy =& \int_0^{2\sqrt{2}}\left(\int_0^{8-x^2}(8-x^2-y)dy\right)dx \\ =& \int_0^{2\sqrt{2}}\frac{(8-x^2)^2}{2}dx \\ =& \int_0^{2\sqrt{2}} 32 - 8x^2 + \frac{x^4}{2}dx \\ =& \left[32x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^{2\sqrt{2}} \\ =& 2\sqrt{2}\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{10}\right) \\ =& 64\sqrt{2}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{512\sqrt{2}}{15}.\end{aligned}$$

なお x, y, z はいずれも 0 以上であることに注意する。