微分積分4 第2回課題解説

1 課題

1) 次の三重積分を求めよ（(a)b) 30 点、c) 40 点）。

a) $\int_{x,y,z\geq 0, x+y+z\leq 3} xy(3-z)dxdydz$,

b) $\int_{1\leq z\leq y\leq x\leq e} \frac{1}{xyz}dxdydz$,

c) $\int_{x^2+y^2+z^2\leq 1} zdxdydz$.

2 解

1a)

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{x,y,z\geq 0, x+y+z\leq 3} xy(3-z)dzdydx &= \iint\limits_{x,y\geq 0, x+y\leq 3} xy\left(\int_0^{3-(x+y)}(3-z)dz\right)dydx \\ &= \iint\limits_{x,y\geq 0, x+y\leq 3} xy\frac{9-(x+y)^2}{2}dydx \\ &= \int_0^3\int_0^{3-x}\frac{9xy-x^3y-2x^2y^2-xy^3}{2}dydx \\ &= \int_0^3 \frac{9x(3-x)^2-x^3(3-x)^2}{4}-\frac{x^2(3-x)^3}{3}-\frac{x(3-x)^4}{8}dx\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}&\frac{9x(3-x)^2-x^3(3-x)^2}{4}-\frac{x^2(3-x)^3}{3}-\frac{x(3-x)^4}{8} \\ =&\frac{9x^3-54x^2+81x-x^5+6x^4-9x^3}{4}+\frac{x^5-9x^4+27x^3-27x^2}{3} \\ &-\frac{x^5-12x^4+54x^3-108x^2+81x}{8} \\ =&-\frac{x^5}{24}+\frac{9}{4}x^3-9x^2+\frac{81}{8}x\end{aligned}$$

なので上記積分は

$$-\frac{3^6}{144}+\frac{9}{4}\times\frac{3^4}{4}-3^4+\frac{81}{8}\times\frac{3^2}{2}=-\frac{81}{16}+\frac{729}{16}-81+\frac{729}{16}=\frac{81}{16}.$$

あるいは

$$\iiint_{x,y,z\geq 0,x+y+z\leq 3} xy(3-z)dxdydz$$

$$=\iint_{y,z\geq 0,y+z\leq 3-x}\frac{(3-y-z)^2y(3-z)}{2}dydz$$

$$=\iint_{y,z\geq 0,y+z\leq 3-x}\frac{(y(3-z)^3-2y^2(3-z)^2+y^3(3-z))}{2}dydz$$

$$=\int_0^3\frac{(3-z)^5}{4}-\frac{(3-z)^5}{3}+\frac{(3-z)^5}{8}dz$$

$$=\int_0^3\frac{(3-z)^5}{24}dz$$

$$=\frac{3^6}{144}=\frac{81}{16}.$$

1b)

$$\iiint_{1\leq z\leq y\leq x\leq e}\frac{1}{xyz}dxdydz=\iint_{1\leq y\leq x\leq e}\frac{1}{xy}\left(\int_1^y\frac{dz}{z}\right)dxdy$$

$$=\iint_{1\leq y\leq x\leq e}\frac{\log y}{xy}dxdy=\int_1^e\frac{1}{x}\left(\int_1^x\frac{\log y}{y}dy\right)dx$$

$$=\int_1^e\frac{\log^2 x}{2x}dx=\left[\frac{\log^3 x}{6x}\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{6}.$$

1c)

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} zdxdydz=\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz\right)dxdy$$

だが

$$\int_{-a}^{a}zdz=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0$$

だから

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} zdxdydz=\iint_{x^2+y^2\leq 1}0dxdy=0.$$

x, y, z は負の値もとることに注意する。

おまけ問題: $\iiint_{x^2+y^2\leq 1,0\leq z\leq\sqrt{1-x^2+y^2}} zdxdydz$ を求めよ。