重積分の順序交換

1 課題

1) 累次積分 $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{3dx}{x^3+1}\right) dy$ の積分順序を交換し、この累次積分の値を求めよ。

2) $\int_0^1 \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{x^2+1} - \arctan x dx$ を求めよ（部分積分法を使うより $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \arctan x$ を微分し、与式を累次積分の形に書き直すほうが簡単)。

3) $\int t^6 e^{t/2} dt$ を部分積分を使わずに求めよ（$\int e^{st} dt$ を s の関数とみて微分する)。

2 課題（解）

1) $0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ より $z = x^3$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{3dx}{x^3+1}\right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{3dy}{x^3+1}\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \int_0^1 \frac{dz}{z+1} \\ &= \log 2.\end{aligned}$$

2) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \arctan x$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

である。また

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{x^2+1} - \arctan x = f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(y) dy$$

だから

$$\int_0^1 \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{x^2+1} - \arctan x dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{2}{(y^2+1)^2} dy\right) dx$$

となる。これは $\{0 \leq x \leq y \leq 1\}$ における重積分と一致するから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{x}{x^2+1}-\arctan x dx &= \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{2}{(y^2+1)^2}dx\right)dy \\ &= \int_0^1 \frac{2y}{(y^2+1)^2}dy = \int_0^1 \frac{dz}{(z+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3)

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_a^b t^n e^{st}dt\right) = \int_a^b t^n \frac{\partial}{\partial s}e^{st}dt = \int_a^b t^{n+1}e^{st}dt \ (n=0,1,\ldots)$$

かつ

$$\int e^{st}dt = \frac{e^{st}}{s}+C$$

なので

$$\begin{aligned}\int te^{st}dt &= \frac{te^{st}}{s}-\frac{e^{st}}{s^2}+C = \left(\frac{t}{s}-\frac{1}{s^2}\right)e^{st}+C, \\ \int t^2e^{st}dt &= \left\{\left(\frac{t^2}{s}-\frac{t}{s^2}\right)+\left(-\frac{t}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)\right\}e^{st}+C \\ &= \left(\frac{t^2}{s}-\frac{2t}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)e^{st}+C,\end{aligned}$$

以下同様にして

$$\begin{aligned}\int t^3e^{st}dt &= \left(\frac{t^3}{s}-\frac{3t^2}{s^2}+\frac{6t}{s^3}-\frac{6}{s^4}\right)e^{st}+C, \\ \int t^4e^{st}dt &= \left(\frac{t^4}{s}-\frac{4t^3}{s^2}+\frac{12t^2}{s^3}-\frac{24t}{s^4}+\frac{24}{s^5}\right)e^{st}+C, \\ \int t^5e^{st}dt &= \left(\frac{t^5}{s}-\frac{5t^4}{s^2}+\frac{20t^3}{s^3}-\frac{60t^2}{s^4}+\frac{120t}{s^5}-\frac{120}{s^6}\right)e^{st}+C, \\ \int t^6e^{st}dt &= \left(\frac{t^6}{s}-\frac{6t^5}{s^2}+\frac{30t^4}{s^3}-\frac{120t^3}{s^4}+\frac{360t^2}{s^5}-\frac{720t}{s^6}+\frac{720}{s^7}\right)e^{st}+C\end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\int t^6e^{t/2}dt = (2t^6-24t^5+240t^4-1920t^3+11520t^2-46080t+92160)e^{t/2}+C$$

となる。

定積分において微分と積分の順序交換を行う場合は微分するだけでよいが、不定積分の場合は改めて積分定数を加える必要があることに注意。