変数変換法 課題解説

1 第4回課題

1/10 までに BEEF に提出し、そのときに 1/12 の学習指示書をダウンロードされたい。

1) $D=\{0\le u\le 1, 0\le v\le 2\}$ とおく。 $x=2u+v, y=u-v$ と変数変換したとき D の行き先となる領域を求めよ。(25 点)

2) (1/10 訂正) $D=\{x,y\ge 0, x+y\le 1\}$ を $x=u-v, y=u+v$ と変数変換したとき、 u,v の動く領域を求めよ。(25 点)

3) 次の重積分を変数変換により求めよ。(各 25 点)

   a) $\iint_{-1\le x-y\le 1, 0\le x+y\le 2} x^2-y^2 dxdy$, b) $\iint_{2x-1\le y\le 2x+1, -x\le y\le -x+3} 3x(x-2y)dxdy$.

2 第4回課題の解

1) $x=2u+v, y=u-v \Leftrightarrow u=(x+y)/3, v=(x-2y)/3$ なので $(u,v)\in D\Leftrightarrow 0\le x+y\le 3, 0\le x-2y\le 6$ である。よって D の行き先は $y=-x, y=3-x, y=(x-6)/2, y=x/2$ で囲まれた領域となる。

2) $x,y\ge 0, x+y\le 1$ に $x=u-v, y=u+v$ を代入し $(x,y)\in D\Leftrightarrow u-v\ge 0, u+v\ge 0, 2u\le 1$ を得る。$u-v\ge 0, u+v\ge 0$ より $u\ge 0$ となるから u,v の動く領域は $-u\le v\le u, 0\le u\le 1/2$ によりあらわされる。

3a) $u=x-y, v=x+y$ とおくとヤコビアンは $1-(-1)=2$ なので $dudv=2dxdy$、よって

$$\iint\limits_{-1\le x-y\le 1, 0\le x+y\le 2} x^2-y^2dxdy=\iint\limits_{-1\le u\le 1, 0\le v\le 2}\frac{uv}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}udu\int_0^2 vdv=0.$$

b) $u=2x-y, v=x+y$ とおくとヤコビアンは $2-(-1)=3$ なので $dudv=3dxdy$、また $x=(u+v)/3, y=(2v-u)/3$ なので

$$\iint_{\substack{2x-1\le y\le 2x+1,\\ -x\le y\le -x+3}} 3x(x-2y)dxdy = \iint_{-1\le u\le 1, 0\le v\le 3} \frac{(u+v)(u-v)}{3}dudv$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{3}\frac{u^2-v^2}{3}dv\right)du = \int_{-1}^{1} u^2-3du$$
$$= -\frac{16}{3}.$$

3　第 5 回課題

1) $F(u,v)=(u(v+1/v)/2, u(v-1/v)/2)$, $D=\{x,y\ge 0, y^2\ge x^2-1, y\le 3x/5\}$ とおく。$F(E)=D$ となる領域 E を求めよ（$F(u,v)=(x,y)$ とおくと $x^2-y^2=u^2$, $y/x=(v-1/v)/(v+1/v)$ となることに注意するとよい）。(25 点)

2) $F(u,v)=(u^2-v^2, 2uv), E=\{0\le u,v\le 1\}$ とおく。$\iint_{F(E)}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ（$(x,y)=F(u,v)$ とおくとよい）。(25 点)

3) 次の重積分（およびその極限）を変数変換により求めよ。(各 25 点)

a) $\iint_{x^2+y^2\le 4, x\ge 0, 0\le y\le x\sqrt{3}} x+3ydxdy$, b) $\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

4　第 5 回課題の解

1) $x=u(v+1/v)/2, y=u(v-1/v)/2$ とおくと

$$x^2-y^2=\frac{u^2}{4}\left(\left(v+\frac{1}{v}\right)^2-\left(v-\frac{1}{v}\right)^2\right)=u^2$$

なので

$$y^2\ge x^2-1 \Leftrightarrow u^2=x^2-y^2\le 1 \tag{1}$$

となる。また

$$\frac{y}{x}=\frac{v-1/v}{v+1/v}=\frac{v^2-1}{v^2+1}$$

なので $x,y>0$ のとき

$$0\le y\le\frac{3x}{5}\Leftrightarrow 0\le\frac{v^2-1}{v^2+1}\le\frac{3}{5}\Leftrightarrow v^2\le 4 \tag{2}$$

である。さらに $x,y\ge 0$ だから $uv=x+y\ge 0$ である。よって $u,v\ge 0$ または $u,v\le 0$ となる。さらに $y\ge 0$ だから $u>0$ のとき $v\ge 1$、 $u<0$

のとき $v \le -1$ となる。よって $u = 0,\ 0 \le u \le 1, 1 \le v \le 2$ または $-1 \le u \le 0, -2 \le v \le -1$ でなければならない。

逆に $u = 0, 0 \le u \le 1, 1 \le v \le 2$ または $-1 \le u \le 0, -2 \le v \le -1$ のとき (1), (2) から $y^2 \ge x^2 - 1, y \le 3x/5$ が成り立ち、さらにこのとき $u \ge 0, v - 1/v \ge 0$ より $x, y \ge 0$ も成り立つ。

一方、$(x, y) \in D$ のとき $u = \sqrt{x^2 - y^2}$, $u \ne 0$ のとき $v = (x + y)/u$, $u = 0$ のとき $v = 1$ とおくと $(x, y) = (u(v + 1/v)/2, u(v - 1/v)/2)$ かつ $(u, v) \in \{0 \le u \le 1, 1 \le v \le 2\}$ となる。また $u = -\sqrt{x^2 - y^2}$, $u \ne 0$ のとき $v = (x + y)/u$, $u = 0$ のとき $v = -1$ とおくと $(x, y) = (u(v + 1/v)/2, u(v - 1/v)/2)$ かつ $(u, v) \in \{-1 \le u \le 0, -2 \le v \le -1\}$ となる。

よって $E = \{-1 \le u \le 0, -2 \le v \le -1\}$, $\{0 \le u \le 1, 1 \le v \le 2\}$ あるいは $\{-1 \le u \le 0, -2 \le v \le -1\} \cup \{0 \le u \le 1, 1 \le v \le 2\}$ とおくと $F(E) = D$ となる。

2) $F(E)$ において $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ とおくとヤコビアンは $2u(2u) - (-2v)(2v) = 4(u^2 + v^2)$ となる。また $u > 0$ のとき $v = y/(2u)$ だから $x = u^2 - y^2/(2u)^2$ となる。これは $0 < u \ge 1$ において狭義単調増加だから $u > 0$ において $F(u, v)$ は単射となっている。よって

$$\begin{aligned}
\iint_{F(E)} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy &= \iint_E 4(u^2 + v^2)\sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2}dudv \\
&= \iint_E 4(u^2 + v^2)^2 dudv = 4\int_0^1 \left(\int_0^1 u^4 + 2u^2v^2 + v^4 dv\right) du \\
&=4\int_0^1 u^4 + \frac{2}{3}u^2 + \frac{1}{5}du = \frac{4}{5} + \frac{8}{9} + \frac{4}{5} = \frac{112}{45}.
\end{aligned}$$

3a) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta (r \ge 0, 0 \le \theta < 2\pi)$ とおくとヤコビアンは r に一致する。また

$$x^2 + y^2 \le 4 \Leftrightarrow 0 \le r \le 2$$

かつ

$$x \ge 0, 0 \le y \le x\sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

より

$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{x^2+y^2\le 4,\\ x\ge 0,\\ 0\le y\le x\sqrt{3}}} (x + 3y)dxdy &= \int_0^{\pi/3} \left(\int_0^2 r^2(\cos\theta + 3\sin\theta)dr\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} \frac{8}{3}(\cos\theta + 3\sin\theta)d\theta = \frac{8}{3}\sin\frac{\pi}{3} + 8 - 8\cos\frac{\pi}{3} \\
&=\frac{4\sqrt{3}}{3} + 4.
\end{aligned}$$

3b) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと、やはりヤコビアンは r に一致するから

$$\iint_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} re^{-r^2}d\theta\right)dr = \pi\int_0^R 2re^{-r^2}dr$$

となる。 $t = r^2$ とおくと

$$\pi\int_0^R 2re^{-r^2}dr = \pi\int_0^{R^2} e^{-t}dt = \pi(1-e^{-R^2})$$

だから

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{R\to\infty}\pi(1-e^{-R^2}) = \pi$$

となる。