微分積分4（変数変換）

山田智宏 (Tomohiro Yamada)

1　平面の１次変換

平面内の図形を原点を中心として縦に k 倍、横に l 倍拡大する変換は、点 (x, y) に対し、点 (kx, ly) を対応させる写像とみることができる。

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ly \end{pmatrix} \tag{1}$$

であるから、この変換は行列 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ によってあらわされているといえる。

また、平面において原点を中心とする反時計回りに角度 θ の回転も行列であらわされる。まず、この変換による点 $P(x, y)$ の行き先 P' を特定する。原点 $O(0, 0)$ および $Q(x, 0), R(0, y)$ をとれば、長方形 $OQRP$ 角 θ 反時計回りの回転写像により Q は $Q'(x\cos\theta, x\sin\theta)$ に、 R は $R'(-y\sin\theta, y\cos\theta)$ に移るが、長方形 $OQRP$ はやはり長方形 $OQ'R'P'$ に移る。よって

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{OR'} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。

$$\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

であるから、この回転変換は行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ によってあらわされている。

ところで、これらの変換 f はいずれも任意の k, h とベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ について

$$kf(\mathbf{u}) + hf(\mathbf{v}) = f(k\mathbf{u} + h\mathbf{v}) \tag{4}$$

となり、また行列を用いて $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ とあらわされる。

一般に任意の k, h とベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ について (4) が成り立つ変換 f を**一次変換**という。

一般に、xy 平面において $f((1,0)) = (a,c), f((0,1)) = (b,d)$ となる一次変換は $f(x,y) = x(a,c) + y(b,d) = (ax+by, cx, dy)$ であたえられる。このことは

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

と行列であらわされる。同様に、 xyz 空間の場合 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{u}, f(\mathbf{y}) = \mathbf{v}, f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ となる一次変換は

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{6}$$

で与えられる。一般に $\mathbb{R}^n$ において $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1, f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2, \ldots, f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{v}_n$ となる一次変換は行列 $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ で与えられる。すなわち、一次変換は行列を用いてあらわされる。逆に行列 A を用いて $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ により定められる写像が一次変換であることは行列の性質から直ちに従う。そこで、この一次変換を T_A とあらわすことにする。

一次変換 T_A は行列 A により $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ によりあらわされることから、次の性質が成り立つ。

1. $T_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
2. $kT_A(\mathbf{u}) + hT_A(\mathbf{v}) = T_A(k\mathbf{u} + h\mathbf{v})$,
3. $kT_A(\mathbf{v}) + hT_B(\mathbf{v}) = T_(kA + hB)(\mathbf{v})$,
4. $T_{BA}(\mathbf{v}) = T_B(T_A(\mathbf{v}))$.
5. $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が平行ならば $T_A(\mathbf{u}), T_A(\mathbf{v})$ も平行。

最初の性質は $T_A(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ からすぐにわかる。2 番目の性質は (4) の書き直しである。3 番目の性質は $kT_A(\mathbf{v}) + hT_B(\mathbf{v}) = kA\mathbf{v} + hB\mathbf{v}$ より、4 番目の性質は $T_{BA}(\mathbf{v}) = BA\mathbf{v} = B(A\mathbf{v})$ よりすぐにわかる。$s\mathbf{u} + t\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ならば最初の性質から $sT_A(s\mathbf{u}) + tT_A(\mathbf{v}) = T_A(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = T_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となることから 5 番目の性質も容易に示される。

またに、$\det A \neq 0$ であるとき、すなわち A^{-1} が存在するとき $T_{A^{-1}}$ は T_A の逆変換を与えている。実際 $T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{v})) = A^{-1}A\mathbf{v} = \mathbf{v}, T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{v})) = AA^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ となる。

上記の 4 番目の性質の逆は一般には成立しない。たとえば $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると $A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ は平行になってしまう。しかし $\det A \neq 0$ のときは $T_A(\mathbf{u}), T_A(\mathbf{v})$ が平行ならば $\mathbf{u} = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{u})), \mathbf{v} = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{v}))$ も平行となる。

2 xy 平面における一次変換と重積分

さて、xy 平面における一次変換 f は 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によりあらわされる。$\det A = ad - bc \neq 0$ のとき

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ad-bc)x = du - bx \\ (ad-bc)y = av - cu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{du-bx}{ad-bc} \\ y = \frac{av-cu}{ad-bc} \end{cases} \tag{7}$$

であるから、一次変換によって、平面全体の点が一対一に対応する。すなわちこの一次変換は全単射である。また、ここで $u = v = 0$ ならば $x = y = 0$ であるから $f((x,y)) = (0,0)$ ならば $(x,y) = (0,0)$ でなければならないことがわかる。

xy 平面上の直線は直線上の任意の一点 (u,v) と $(0,0)$ でない方向ベクトル (p,q) をとり、$\ell = \{(u,v)+t(p,q) : t \in \mathbb{R}\}$ とあらわされる。$f((u,v)+t(p,q)) = f((u,v)) + tf((p,q)) = (au+bv, cu+dv) + t(ap+bq, cp+dq)$ である。$(p,q) \neq (0,0)$ だから $(ap+bq, cp+dq)$ も $(0,0)$ でないので直線 ℓ の f による行き先 $f(\ell)$ も直線であることがわかる。

同様に xy 平面上の線分 $\ell = \{(u,v) + m(p,q) : s \leq m \leq t\}$ の f による行き先は $\{(au+bv, cu+dv) + m(ap+bq, cp+dq) : s \leq m \leq t\}$ となる、やはり線分である。

$h, k > 0$ とし $D = [s, s+h] \times [t, t+k]$ の形の領域をとる。この領域の面積は hk である。$f(D) = \{A\mathbf{v} : \mathbf{v} \in S\} = \{(ax+by, cx+dy) : s \leq x \leq s+h, t \leq y \leq t+k\}$ の形の集合を考える。このときつぎのように $f(D)$ の形状と面積が求められる。

Theorem 2.1. 4 点 $P = f((s,t)) = (as+bt, cs+dt)$, $Q = f((s+h,t)) = (as+bt, cs+dt) + h(a,c)$, $R = f((s+h,t+k)) = (as+bt, cs+dt) + h(a,c) + k(b,d)$, $S = f((s,t+k)) = (as+bt, cs+dt) + k(b,d)$ をとると、$f(D)$ は平行四辺形 $PQRS$（によりつくられる領域）と一致する。

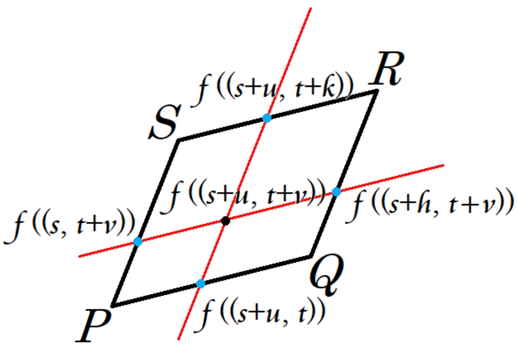

図 1: $f(\mathbf{v})$ の位置

Proof. $f((s+u,t+v)) = f((s,t)) + f((u,v)) = P + u(a,c) + v(b,d)$ であるから $PQ = \{P + x(a,c) : 0 \leq x \leq h\}$, $QR = \{P + h(a,c) + y(b,d) = Q + y(b,d) : 0 \leq y \leq k\}$,

$RS = \{P+x(a,c)+k(b,d) = S+x(a,c) : 0 \leq x \leq h\}, SP = \{P+y(b,d) : 0 \leq y \leq k\}$ が成り立つ。このことから PQ と RS, QR と PS はそれぞれ互いに平行なのでこの 4 辺でつくられる四角形 $PQRS$ は平行四辺形となる。

$\mathbf{v} = (s+u, t+v) \in S(0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq k)$ をとる。$f(\mathbf{v}) = f((s+u, t+v))$ は 2 つの線分 $\{f(s+u, t+y) : 0 \leq y \leq k\}$, $\{f(s+x, t+v) : 0 \leq x \leq h\}$ の交点である。この線分の端点は $f(s+u,t), f(s+u,t+k), f(s,t+v), f(s+h,t+v)$ はそれぞれ辺 PQ, RS, PS, QR 上にある。よってその交点である $f(\mathbf{v})$ は平行四辺形 $PQRS$ の境界あるいはその内部にある。逆に平行四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域上の点は $P+u(a,c)+v(b,d) = f((s+u, t+v))$ とあらわされるから $f(D)$ は平行四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域と一致する。 □

Theorem 2.2. $f(D)$ の面積は $hk\,|\det A|$ に一致する。

Proof. 平行四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域の面積を求めたい。R, S を通る直線は $\ell : \{S+w(a,c) = (a(s+w)+b(t+k), c(s+w)+d(t+k)) : w \in \mathbb{R}\}$ とあらわされる。

$a \neq 0$ の場合を考える。この直線 ℓ と $x = as+bt$ の交点は $aw+bk = 0$ より

$$w = -bk/a, T = S-(bk, cbk/a) = (as+bt, cs+dt+k(d-bc/a)) \tag{8}$$

により与えられる。同様に ℓ と $x = a(s+h)+bt$ の交点は $aw+bk = ah$ より $w = h-bk/a, U = S+h(a,c)-(bk, cbk/a) = R-(bk, cbk/a)$ により与えられる。

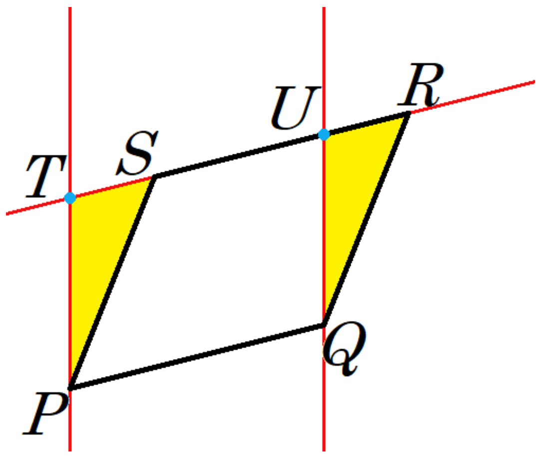

図 2: $\mu(PQUT) = \mu(PQRS)$

$T-U = R-S = h(a,c) = Q-P$ より三角形 PTS と三角形 QUR は互いに合同だから両者の面積は一致する。平行四辺形 $PQUT$ は平行四辺形 $PQRS$ から三角形 QTR を取り除き三角形 PUS を加えた領域となるから、平行四辺形 $PQUT$ の面積 $\mu(PQUT) = \mu(PQRS) - \mu(QUR) + \mu(PTS)$ は平行四辺形 $PQRS$ の面積と一致する。

辺 PT は y 軸に平行なのでこの辺を底辺とすると、 $PQUT$ の高さは 2 点 P, Q の x 座標の差であらわされる。よって

$$\mu(PQUT) = k\,|d-bc/a| \times ah = hk\,|ad-bc| = hk\,|\det A| \tag{9}$$

となる。このことは平行四辺形 $PQRS$ の面積も $hk\,|\det A|$ に一致することをあらわしている。$a=0$ の場合は $b\neq 0$ なので、Q,R を通る直線を代わりに考えることで、平行四辺形 $PQRS$ の面積が $hk\,|\det A|$ に一致することを示すことができる。 □

Example 2.3.

$$F(u,v)=(u-v,u+v),D_1=[0,1]\times[0,1]=\{0\leq u,v\leq 1\}$$

とおく。このとき $F(D_1)$ はどのような領域となるか？

$$u-v=x,u+v=y\Leftrightarrow u=(x+y)/2,v=(y-x)/2$$

だから

$$(x,y)\in F(D_1)\Leftrightarrow 0\leq y-x,x+y\leq 2\Leftrightarrow x\leq y\leq x+2,-x\leq y\leq 2-x$$

だから

$$F(D_1)=\{(x,y):\max\{-x,x\}\leq y\leq\min\{x+2,-x+2\}\}$$

である。つまり $F(D_1)$ は $y=x,y=-x,y=x+2,y=-x+2$ で囲まれた領域となる。これらの 4 直線の交点をとることで $F(D_1)$ は $(0,0),(1,1),(2,0),(-1,1)$ を頂点とする正方形であることがわかる。よって $\mu(F(D_1))=2$ である。

より具体的にあらわすには、まず、$(x,y)\in F(D_1)$ のとき $-x\leq x+2$ であるから、$x\geq -1$ でなければならず、$x\leq 2-x$ であるから $x\leq 1$ でなければならないことに注意する。$-1\leq x\leq 0$ のときは $-x\geq x,-x+2\geq x+2$ であるから $(x,y)\in F(D_1)\Leftrightarrow -x\leq y\leq x+2$ となる。$0\leq x\leq 1$ のときは $-x\leq x,-x+2\leq x+2$ であるから $(x,y)\in F(D_1)\Leftrightarrow x\leq y\leq 2-x$ となる。したがって

$$F(D_1)=\{-1\leq x\leq 0,-x\leq y\leq x+2\}\cup\{0\leq x\leq 1,x\leq y\leq 2-x\}$$

とあらわすことができる。

このようにして一次変換によって長方形が平行四辺形に移り、面積は $|\det A|$ 倍となることがわかる。より一般に、一次変換によって面積は $|\det A|$ 倍となるのである。

Theorem 2.4. $D=f(E)$ ならば $\mu(D)=|\det A|\,\mu(E)$ となる。

Proof. E^-, E^+ を $E^-\subset E\subset E^+$ となる、長方形の貼り合わせで得られる領域とする。E^-, E^+ を構成する各長方形に関しては定理 2.2 が成り立つから、 E^-, E^+ に関しても定理 2.2 から $|\det A|\,\mu(E^-)=\mu(f(E^-))$, $|\det A|\,\mu(E^+)=\mu(f(E^+))$ が成り立つのでそれを用いて $E,f(E)$ を近似する。

たとえば $I_n(k,\ell) = [k/n, (k+1)/n] \times [\ell/n, (\ell+1)/n]$ のような小さな正方形の領域をとり、

$$\begin{aligned} E_n^- &= \bigcup_{I_n(k,\ell)\in E} I_n(k,\ell), \\ E_n^+ &= \bigcup_{I_n(k,\ell)\cap E\neq\emptyset} I_n(k,\ell) \end{aligned} \tag{10}$$

とおく。つまり E_n^- は $I_n(k,\ell)$ が E に完全に含まれているようなものをすべてあわせたものとし、E_n^+ は $I_n(k,\ell)$ の中に E の点が一点でも含まれているようなものをすべてあわせたものとする。すると $E_n^- \subset E \subset E_n^+$ となる。さらに

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^-) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^+) \tag{11}$$

となる。$D_n^- = f(E_n^-)$, $D_n^+ = f(E_n^+)$ とおくと D_n^-, D_n^+ は $f(I_n(k,\ell))$ の貼り合わせで

$$\begin{aligned} D_n^- &= \bigcup_{I_n(k,\ell)\in E} f(I_n(k,\ell)), \\ D_n^+ &= \bigcup_{I_n(k,\ell)\cap E\neq\emptyset} f(I_n(k,\ell)) \end{aligned} \tag{12}$$

とあらわされ、やはり $D_n^- \subset D \subset D_n^+$ かつ

$$\mu(D) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_n^-) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_n^+) \tag{13}$$

が成り立つ。また f は一対一の写像なので $f(I_n(k,\ell))$ は境界線以外の共通部分をもたない。よって定理 2.2 から

$$\begin{aligned} D_n^- &= \sum_{I_n(k,\ell)\in E} \mu(f(I_n(k,\ell))) = \sum_{I_n(k,\ell)\in E} |\det A|\, \mu(I_n(k,\ell)) = |\det A|\, \mu(E_n^-), \\ D_n^+ &= \sum_{I_n(k,\ell)\cap E\neq\emptyset} \mu(f(I_n(k,\ell))) = |\det A| \sum_{I_n(k,\ell)\cap E\neq\emptyset} \mu(I_n(k,\ell) = |\det A|\, \mu(E_n^+) \end{aligned} \tag{14}$$

が成り立つ。(11), (13) より

$$\mu(D) = |\det A|\, \mu(E) \tag{15}$$

が成り立つ。 □

Example 2.5. 先程の例で

$$D_2 = \{u, v \geq 0, u + v \leq 1\}$$

とおく。このとき $F(D_2)$ はどのような領域となるか？

$$(x,y) \in F(D_2) \Leftrightarrow y-x, x+y \geq 0, (y-x)/2 + (x+y)/2 \leq 1 \Leftrightarrow y \geq \max\{-x, x\}, y \leq 1$$

だから

$$F(D_2) = \{(x, y) : -y \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$$

となる（$y \geq 0$ であることは $-y \leq x \leq y$ となる x が存在することから従う）。これは $(0,0), (-1,1), (1,1)$ を頂点とする直角二等辺三角形で、 $\mu(F(D_2)) = 1 = 2\mu(D_2)$ である。

Example 2.6. 先程の例で

$$E = \{0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 - x\}$$

とおく。このとき $F(D_3) = E$ となる領域 D_3 はどのような領域となるか？

$$F(u, v) \in E \Leftrightarrow 0 \leq u - v \leq 1, u + v \geq 1, 2u \leq 2$$

だから

$$D_3 = \{(u, v) : u \leq 1, \max\{u - 1, 1 - u\} \leq v \leq u\}$$

であるが $1 - u \leq v \leq u$ だから $u \geq 1/2$ なので、D_3 においては $u - 1 \leq 1 - u$ となる。よって

$$D_3 = \{(u, v) : 1/2 \leq u \leq 1, 1 - u \leq v \leq u\}$$

となる。つまり D_3 は $(1/2, 1/2), (1, 0), (0, 1)$ を頂点とする直角二等辺三角形であることがわかる。

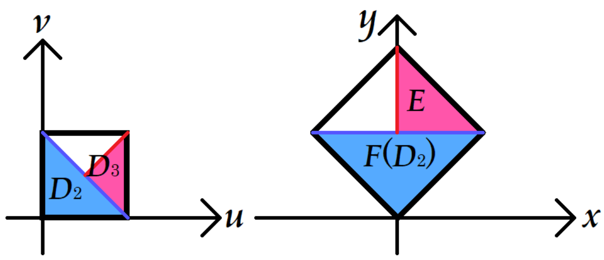

図 3: $D_2, D_3, F(D_2), E$, 黒の太線で囲まれた部分が $D_1, F(D_1)$

これを用いて、一次変換と重積分の関係について考える。

Theorem 2.7.

$$\iint_D F(x, y) dx dy = |\det A| \iint_E G(u, v) du dv \tag{16}$$

が成り立つ。

Proof. $D = f(E), G(u,v) = F(au+bv, cu+dv)$ とおく。E の分割 $E = \bigcup T_i$ に対して、$S_i = F(T_i)$ とおくと S_i は D の分割になっており、各 i について $\mu(S_i) = \mu(F(T_i)) = |\det A|\,\mu(T_i)$ となる。$E = \bigcup T_i$ に関するリーマン和 $\sum_i G(u_i, v_i)\mu(T_i)$ に対して $x_i = au_i + bv_i, y_i = cu_i + dv_i$ とおくと

$$\begin{aligned}\sum_i F(x_i, y_i)\mu(S_i) &= \sum_i F(au_i + bv_i, cu_i + dv_i)(\mu(T_i)\,|\det A|) \\ &= |\det A| \sum_i G(u_i, v_i)\mu(T_i)\end{aligned} \tag{17}$$

となるから

$$\iint_D F(x,y)dxdy = |\det A| \iint_E G(u,v)dudv \tag{18}$$

が成り立つ。 □

3　多重積分における変数変換

多重積分における一次変換に関する公式について議論したので、つづいて一般の変数変換に関する公式を考える。すなわち $\iint_D G(x,y)dxdy$ において $(x,y) = F((u,v))$ とおいたときに、 u, v の積分で表すことを考える。

$F(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ とおいて、E において全単射であるとする。

ある点 (u_0, v_0) において $a = \varphi_u(u_0, v_0),\ b = \psi_v(u_0, v_0),\ c = \varphi_u(u_0, v_0),\ d = \psi_v(u_0, v_0)$ とすると (u_0, v_0) の近くでは $F(u,v) - F(u_0, v_0)$ は $(a(u-u_0) + b(v-v_0), c(u-u_0) + d(v-v_0))$ で近似できる。それで

$$J(u_0, v_0) = \det \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0, v_0) & \psi_u(u_0, v_0) \\ \varphi_v(u_0, v_0) & \psi_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{19}$$

とおくと $D = F(E), H(u,v) = G(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ のとき

$$\iint_D G(x,y)dxdy = \iint_E H(u,v)\,|J(u,v)|\,dudv \tag{20}$$

が成り立っていると考えることができる。

ここでは (20) の両辺の二重積分が定義され、φ, ψ が E において C^1-級関数である場合に (20) を証明する。

まず E が $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ の形の長方形領域である場合を考える。E の分割 $\bigcup T_i$ に関するリーマン和 $\sum_i G(u_i, v_i)\mu(T_i)$ をとる。この分割 $E = \bigcup T_i$ に対して、$S_i = F(T_i)$ とおくと S_i は D の分割になっており、

$$\sum_i F(x_i, y_i)\mu(S_i) = \sum_i G(u_i, v_i)\mu(F(T_i)) \tag{21}$$

が成り立つ。ここで $\mu(F(T_i))$ が $\mu(T_i)\,|J(u_i,v_i)|$ で近似できれば

$$\begin{aligned}\iint_D G(x,y)dxdy =& \lim\sum_i F(x_i,y_i)\mu(S_i) = \lim\sum_i G(u_i,v_i)\,|J(u_i,v_i)|\,\mu(T_i)\\ =& \iint_E H(u,v)\,|J(u,v)|\,dudv\end{aligned} \tag{22}$$

が成り立つ。ここで lim は E の分割を細分化したときの極限をあらわす。

定数 $\alpha \geq 1$ をとり、h,k は $\alpha^{-1}k \leq h \leq \alpha k$ となる正の実数とする。h,k が小さいとき $K=[s,s+h]\times[t,t+k]=\{s\leq u\leq s+h, t\leq v\leq t+k\}$ が $F(u,v)$ によって $F(K)$ に移っているとき、$\mu(F(K))$ が $|J(s,t)|\,\mu(K)$ に近づくことを示す。$P(s,t)$, $Q(s+h,t)$, $R(s,t+k)$, $S(s+h,t+k)$ とおくと K はこれらの 4 点で定まる長方形となる。

$|u|\leq h, |v|\leq k$ だからテイラー展開すると、

$$\begin{aligned}\varphi(s+u,t+v) =& \varphi(s,t)+u\varphi_u(s+u_1,t+v_1)+v\varphi_v(s+u_1,t+u_1),\\ \psi(s+u,t+v) =& \psi(s,t)+u\psi_u(s+u_2,t+v_2)+v\psi_v(s+u_2,t+y_2)\end{aligned} \tag{23}$$

となる $0\leq u_1,u_2\leq h$, $0\leq v_1,v_2\leq k$ がとれる。ここで $a=\varphi_u(s,t)$, $b=\psi_u(s,t)$, $c=\varphi_v(s,t)$, $d=\psi_v(s,t)$ とおき $\delta=\max\{h,k\}$, さらにテイラー展開の係数に現れた偏導関数と $\varphi_u(s,t)$ などとの差を

$$\epsilon_1=\max\{|\varphi_u(s+u_1,t+u_1)-\varphi_u(s,t)|\,,|\varphi_v(s+u_1,t+u_1)-\varphi_v(s,t)|\},\epsilon_2=\max\{|\psi_u(s+u_1,t$$

とおくと

$$\begin{aligned}\varphi(s+u,t+v) =& \varphi(s,t)+au+cv+\epsilon_1\theta_1\delta,\\ \psi(s+u,t+v) =& \psi(s,t)+bu+dv+\epsilon_2\theta_2\delta\end{aligned} \tag{24}$$

となる $|\theta_1|\,,|\theta_2|\leq 1$ がとれる（θ_1,θ_2 は u,v によって変化する)。$\epsilon_0=\max\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$ とおくと

$$F(s+u,t+v)=P+u(a,b)+v(c,d)+\delta\epsilon_0(\theta_1,\theta_2) \tag{25}$$

となる $|\theta_1|\,,|\theta_2|\leq 1$ が改めてとれる（ここでも θ_1,θ_2 は u,v によって変化する)。

L_0 を 4 点 $F(P)$, $F(Q)$, $F(R)$, $F(S)$ から得られる平行四辺形とすると、前節でみたように

$$L_0=\{P+u(a,b)+v(c,d): 0\leq u\leq h, 0\leq v\leq k\} \tag{26}$$

とあらわされ、 $\mu(L_0)=hk(ad-bc)$ となる。そして、やはり前節と同じように 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ により $\mu(L_0)=hk\,|\det A|$ とあらわされる。

さて、$L=F(K)$ は L_0 により近似できると考えられる。実際、次のようにしてそれは示される。$0\leq y\leq h, 0\leq v\leq k$ のとき $P+u(a,b)+v(c,d)$ は L_0 に含まれ

る。よって

$$L^- = \{(x,y) : |\alpha|, |\beta| \le \delta\epsilon_0 \Rightarrow (x+\alpha, y+\beta) \in L_0\},$$
$$L^+ = \{(x,y) = P + u(a,b) + v(c,d) + (\alpha,\beta) : \quad (27)$$
$$0 \le u \le h, 0 \le v \le k, |\alpha|, |\beta| \le \delta\epsilon_0\}$$

とおくと

$$L^- \subset F(K) \subset L^+ \quad (28)$$

という包含関係が成り立つ。またその構成から明らかなように

$$L^- \subset L_0 \subset L^+ \quad (29)$$

も成り立つ。したがって

$$\mu(L^-) \le \mu(F(K)), \mu(L_0) \le \mu(L^+) \quad (30)$$

となる。

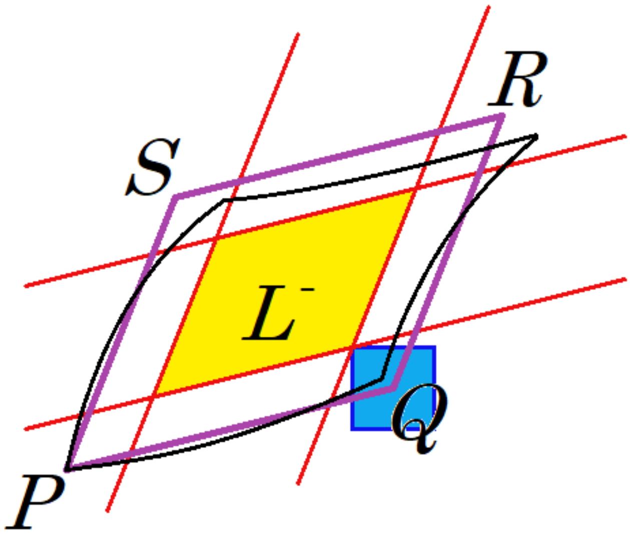

図 4: 黒線部分が $F(K)$, $L_0 = PQRS$, 黄色の領域が L^-

L_0 の内部にあって、L_0 の各辺からの距離が $\delta\epsilon_0\sqrt{2}$ 以上の点は L^- に含まれるから

$$\mu(L^-) \ge \mu(L_0) - C_1\delta^2\epsilon_0 = hk\,|\det A| - C_1\delta^2\epsilon_0 \ge hk(|\det A| - C_2\epsilon) \quad (31)$$

となる定数 C_1, C_2 がとれる（右側の不等式では $\delta = \max\{h,k\} \le \alpha \min\{h,k\}$ を用いた）。一方 L^+ の点は L_0 のいずれかの辺からの距離が $\delta\epsilon_0\sqrt{2}$ 以下でなければならないから

$$\mu(L^+) \le \mu(L_0) + C_3\delta^2\epsilon_0 = hk\,|\det A| + C_3\delta^2\epsilon \le hk(|\det A| + C_4\epsilon_0) \quad (32)$$

となる定数 C_3, C_4 がとれる。よって

$$\mu(F(K)) = hk(|\det A| + \theta C_5 \epsilon_0) = \mu(K)(|\det A| + \theta C_5 \epsilon_0) \tag{33}$$

となる $|\theta| \leq 1$ と 定数 C_5 がとれる。

E が $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ の形の長方形領域であるとき E は $T_i = [u_i, u_i + h] \times [v_i, v_i + k]$ の形の領域に分割できる。$K = T_i$ について先程の考察を適用すると

$$\mu(S_i) = \mu(F(T_i)) = \mu(T_i)(|\det A| + \theta C_5 \epsilon_0) \tag{34}$$

となる。C_5, ϵ_0 は T_i によって変化するが、 C_5 の取り方から、φ, ψ の 2 階偏導関数が E において有界ならば T_i によらずに $C_5 \leq C$ となる定数 C がとれる。かつ φ, ψ は C^1-級だから偏導関数は連続なので、有界閉領域 E においては $\epsilon_0 \leq \epsilon$ となる。よって (21) より

$$\sum_i F(x_i, y_i)\mu(S_i) = (|\det A| + \theta C\epsilon) \sum_i G(u_i, v_i)\mu(T_i) \tag{35}$$

となる。h, k が $\alpha^{-1}k \leq h \leq \alpha k$ という関係を保ちながら 0 に近づくとき、$\delta = \max\{h, k\}$ および ϵ も 0 に近づくから (35) の両辺の極限は一致し、(22) が成り立ち、(20) が従うことがわかる。

E が一般の領域であるとき $E \subset E_0 = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ となる長方形領域 E_0 をとり、E_0 において $G_0(x, y) = G(x, y)((x, y) \in F(E)), 0((x, y) \notin F(E))$ と定めると $H_0(u, v) = G_0(F(u, v))$ は E において $H(x, y)$ に、E 以外の場所では 0 に一致する。累次積分と二重積分の一致を示したときと同じ論法で (20) がいえる。

また、累次積分と二重積分の一致を示したときと同じ論法で E から面積 0 の部分を取り除いたところで $F(u, v)$ が全単射、C^1-級関数でかつ偏導関数が有界である場合にも (20) がいえる。

Theorem 3.1. $F(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ が E から面積 0 の部分を取り除いたところで全単射、C^1-級関数でかつ偏導関数が有界であるとする。

$$J_F(u_0, v_0) = \det \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0, v_0) & \psi_u(u_0, v_0) \\ \varphi_v(u_0, v_0) & \psi_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{36}$$

とおくと二重積分 $\iint_D G(x, y)dxdy$, $\iint_E H(u, v)\,|J(u, v)|\,dudv$ が定まっているとき

$$\iint_D G(x, y)dxdy = \iint_E H(u, v)\,|J(u, v)|\,dudv \tag{37}$$

が成り立つ。

これは

$$\iint_E G(F(u, v))\,|J(u, v)|\,dudv = \iint_{f(E)} G(x, y)dxdy \tag{38}$$

のようにいいかえることもできる。

J_F を F のヤコビ行列式あるいはヤコビアン (Jacobian) という。

Example 3.2. $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ に対して

$$(x, y) = F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)(0 \leq \theta < 2\pi)$$

と極座標表示する。

$$E = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

とおくと $(x, y) = (0, 0) \in D$ および $\{r = 0\}, \{\theta = 2\pi\} \subset E$ を除けば $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin\theta = y/\sqrt{x^2 + y^2}$ により (r, θ) と (x, y) は一対一に対応する。

$$J_F(r, \theta) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r \tag{39}$$

であるから $H(r, \theta) = G(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくと

$$\iint_D G(x, y)dxdy = \iint_{0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi} rH(r, \theta)drd\theta \tag{40}$$

が成り立つ。