広義重積分 課題

1 課題

1) $F(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ とおき、$t>0$ に対して有界閉領域領域の列 $D_n(t)=[1/n,1]\times[t/n,1]$ を定める。$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n(t)}F(x,y)dxdy$ を t の関数として求めよ。(25 点)

2) 次の広義重積分を求めよ。(各 25 点)

   a) $\iint_{0\le x,y\le 1}\frac{x}{x^2+y^2}dxdy$, b) $\iint_{x,y\ge 0, x^2+y^2\le 1}\frac{x}{x^2+y^2}dxdy.$

3) $\alpha>0$ とする。$D=\{0\le x\le y\le 1\}$ における $1/(y-x)^\alpha$ の広義積分について、可能な場合と不可能な場合、可能な場合の積分の値を決定せよ。(25 点)

4) (おまけ問題)補足ファイルで触れた積分 $\int_K^L e^{-t}t^{s-1}\log t dt$ が $s\in[1,2]$ において $K\to+0, L\to+\infty$ のとき絶対一様収束することを示せ。(30 点)

2 解説

1) $F(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ とおき、$t>0$ に対して有界閉領域領域の列 $D_n(t)=[1/n,1]\times[t/n,1]$ を定める。$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n(t)}F(x,y)dxdy$ を t の関数として求めよ。$n>t$ としてよい。

$$\iint_{D_n(t)}F(x,y)dxdy=\int_{1/n}^1\left(\int_{t/n}^1\frac{1}{x}-\frac{1}{y}dy\right)dx=\int_{1/n}^1\left(1-\frac{t}{n}\right)\frac{1}{x}-\log\frac{n}{t}dx$$
$$=\left(1-\frac{t}{n}\right)\log n-\left(1-\frac{1}{n}\right)(\log n-\log t)$$
$$=\frac{1-t}{n}\log n+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log t$$

であるから、$\log n/n\to 0(n\to\infty)$ より

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n(t)}F(x,y)dxdy=\log t$$

となる。

2a) $x, y \geq 0$ のとき $x/(x^2+y^2) \geq 0$ だから、$[0,1]\times[0,1]$ で広義積分可能である。$y = xz$ とおくと

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{1/x} \frac{dz}{1+z^2} = \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

であり、また

$$\begin{aligned}\int_d^1 \arctan x dx =& [x\arctan x]_d^1 - \int_d^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ =& \frac{\pi}{4} - d\arctan d - \frac{\log 2 - \log(1+d^2)}{2}\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[d,1]} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \int_d^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx = \int_d^1 \frac{\pi}{2} - \arctan x dx \\ =& \frac{\pi(1-d)}{2} - \frac{\pi}{4} + d\arctan d + \frac{\log 2 - \log(1+d^2)}{2}\end{aligned}$$

であるから

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}.$$

次のようにして求めることもできる。

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{z+y^2} = \log\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$$

であり、また

$$\begin{aligned}\int_d^1 \log\left(1+\frac{1}{y^2}\right)dx =& \left[y\log\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\right]_d^1 - \int_d^1 \frac{-2y}{y^3\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}dy \\ =& \log 2 - d\log\left(1+\frac{1}{d^2}\right) + 2\int_d^1 \frac{dy}{1+y^2} \\ =& \log 2 - d\log\left(1+\frac{1}{d^2}\right) + \frac{\pi}{2} - 2\arctan d\end{aligned}$$

であるから

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}.$$

2b) 2a) と同様に、$x, y \geq 0$ のとき $x/(x^2+y^2) \geq 0$ だから、$x, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1$ で広義積分可能である。$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\iint_{x,y\geq 0, s^2\leq x^2+y^2\leq 1} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \iint_{s\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq\pi/2} \frac{r\cos\theta}{r^2}rdrd\theta \\ =& \int_s^1 \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta\right)dr \\ =& (1-s)\sin\frac{\pi}{2} = 1-s\end{aligned}$$

なので

$$\iint_{x,y\geq 0,x^2+y^2\leq 1}\frac{x}{x^2+y^2}dxdy = 1-0=1.$$

3) $\alpha > 0$ とする。$D = \{0 \leq x \leq y \leq 1\}$ における $1/(y-x)^\alpha$ の広義積分について、可能な場合と不可能な場合、可能な場合の積分の値を決定せよ。(25 点)

$t > 0$ に対して $D(t) = \{x \geq 0, x+t \leq y \leq 1$ とおくと $0 < \alpha < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\iint_{D(t)}\frac{1}{(y-x)^\alpha}dxdy =& \int_0^{1-t}\left(\int_{x+t}^1 \frac{dy}{(y-x)^\alpha}\right)dx\\ =& \int_0^{1-t}\frac{(1-x)^{1-\alpha}-t^{1-\alpha}}{1-\alpha}dx\\ =& \frac{1-t^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} - \frac{(1-t)t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\\ =& \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{-t^{2-\alpha}+(2-\alpha)t^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\\ =& \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\end{aligned}$$

だが $0 < \alpha < 1$ より $t^{1-\alpha}, t^{2-\alpha} \to 0$ なので

$$\iint_D \frac{1}{(y-x)^2}dxdy = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}.$$

$\alpha \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}\iint_{D(t)}\frac{1}{(y-x)^\alpha}dxdy \geq& \iint_{D(t)}\frac{1}{y-x}dxdy\\ =& \int_0^{1-t}\log(1-x)-\log t dx\\ =& -t\log t + t - 1 - (1-t)\log t = t - \log t - 1\end{aligned}$$

だから

$$\iint_D \frac{1}{(y-x)^2}dxdy = +\infty.$$

よって $1/(y-x)^\alpha$ は $0 < \alpha < 1$ のとき D で広義積分可能で値は $1/(1-\alpha)(2-\alpha)$ となり、$\alpha \geq 1$ のときは正の無限大に発散する。

4) $k > 0$ について $f_k(x) = x^k e^{-x}$ とおくと $f_k'(x) = (kx^{k-1}-x^k)e^{-x} = x^{k-1}(k-x)e^{-x}$ であるから $f_k(x)$ は $0 \leq x \leq k$ で単調増加、$x \geq k$ で単調減少、よって $x \geq 0$ のとき $f_k(x) \leq f_k(k) = (k/e)^k$ である。よって $t \geq 1$ のとき $\log t \leq t/e, t^2e^{-t/2} = (t^4e^{-t})^{1/2} \leq (4/e)^2$ なので

$$t(\log t)e^{-t} \leq t^2e^{-t-1} = \frac{t^2e^{-t/2}}{e^{t/2+1}} \leq \frac{(4/e)^2}{e^{t/2+1}} = \frac{16}{e^3}e^{-t/2}$$

が成り立つ。よって $T \geq L \geq 1$ のとき

$$\int_L^T e^{-t}t^{s-1}\log t dt \leq \int_L^T e^{-t}t\log t dt \leq \frac{16}{e^3}\int_L^T e^{-t/2}dt < \frac{32}{e^{L/2+3}}$$

となる。よって $\int_K^L e^{-t}t^{s-1}\log t dt (1 \leq s \leq 2)$ は $L \to +\infty$ のとき絶対一様収束する。

また $0 < \epsilon \leq K \leq 1$ のとき $e^{-t} < 1, t^{s-1} \leq t^0 = 1$ より $U = 1/\epsilon, u = 1/t$ とおくと

$$\int_\epsilon^K e^{-t}t^{s-1}\log t dt \leq \int_\epsilon^K \log t dt = \int_{1/K}^U \frac{\log u}{u^2}du$$

だが、 $\log^2 u \leq (2/e)^2 u$ より $\log u \leq (2/e)u^{1/2}$ だから

$$\int_\epsilon^K e^{-t}t^{s-1}\log t dt \leq \frac{2}{e}\int_{1/K}^U \frac{du}{u^{3/2}} < \frac{4\sqrt{K}}{e}$$

となる。よって $\int_K^L e^{-t}t^{s-1}\log t dt (1 \leq s \leq 2)$ は $K \to +0$ のとき絶対一様収束する。