微分積分4（広義重積分）

山田智宏 (Tomohiro Yamada)

1　広義の重積分の定義

2変数関数についても積分範囲を非有界領域や閉ではない領域に拡張したい。

D を必ずしも有界閉領域でない領域とする。有界閉領域 $U_1, U_2, \ldots$ が D に含まれていて、各 U_i では $F(x,y)$ が重積分可能、かつ U_i が D に近づいていく場合を考える。

そもそも U_i が D に近づくとはどういうことか。まず $i \leq j$ ならば $U_i \subset U_j$ であるとする（実数列になぞらえて、これを (U_n) が**単調増加**であるという）。そして D の任意の要素が、ある U_i に含まれている（先の条件から、当然、$j \geq i$ ならば U_j にも含まれている）ときに U_i は D に近づくといい $U_n \to D (n \to \infty)$ であらわす。

たとえば

$$U_n = [-n, n] \times [n, n]$$

とおくと

$$U_n \to \mathbb{R}^2 (n \to \infty)$$

となる。

また

$$U_n = [1/n, 1] \times [1/n, 1]$$

とおくと

$$U_n \to (0, 1] \times (0, 1] (n \to \infty)$$

となる。ここで右辺の極限は $x = 0$ や $y = 0$ となる点を含んでいないことに注意する必要がある。

$$F(x, y) = 1/(xy)^{1/4}$$

のように $x = 0$ や $y = 0$ で定義されていない関数でも D で定義されていて、各 U_n で有界かつ連続ならば各 U_n では積分可能である。しかし D は閉ではないので D で有界とは限らない（実際先程の例 $F(x, y) = 1/(xy)^{1/4}$ では有界ではない）。そのため、このような領域に重積分を拡張するには、1変数関数の場合の広義積分に相当する考察が必要となる。

1変数関数の場合と同様に、U_n での重積分の極限 $\lim_{n\to\infty} \iint_{U_n} F(x, y) dxdy$ を D での広義の重積分と考えることになる。ただし注意しなければならないのは1変数

関数の場合と同様、D に近づく領域の列のとり方は一意的ではない。1 変数関数の場合でもたとえば $(-\infty,\infty)$ や、両側開区間 (a,b) での広義積分において有界閉区間 $[t,u]$ をこうした区間に近づける際、左端と右端の近づく速さの違いによって極限の値が変化するために広義積分が不可能である場合があった。2 変数関数の場合は事情はより複雑になる。

　ひとまず

$$\iint_U F(x,y)dxdy, U\subset D, U\to D \tag{1}$$

が U の D への近づき方によらずにひとつの極限値 L に収束するとき $F(x,y)$ は D で**広義積分可能**であるといい

$$\iint_D F(x,y)dxdy = L \tag{2}$$

によって広義積分の値を定めることとする。

　たとえば

$$F(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{3}$$

を $D=(0,1]\times(0,1]$ で広義積分することを考える（$\arctan(y/x)$ を x,y で 1 回ずつ偏微分したものであることに注意）。

$$\int F(x,y)dx = \int -\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \frac{-x}{x^2+y^2}+C \tag{4}$$

および

$$\int F(x,y)dy = \int \frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \frac{y}{x^2+y^2}+C \tag{5}$$

より $a>0, D(a)=[a,1]\times(0,1]$ とおくと

$$\begin{aligned}\iint_{D(a)} F(x,y)dxdy &= \int_a^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = \int_a^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx \\ &= \arctan 1 - \arctan a\end{aligned} \tag{6}$$

が成り立つ。よって

$$\lim_{a\to+0}\iint_{D(a)} F(x,y)dxdy = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \tag{7}$$

である。一方 $b>0, E(b)=(0,1]\times[b,1]$ とおくと

$$\begin{aligned}\iint_{E(b)} F(x,y)dxdy &= \int_b^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = \int_b^1 -\frac{x}{x^2+y^2}dx \\ &= -\arctan 1 + \arctan b\end{aligned} \tag{8}$$

であるから

$$\lim_{b\to+0}\iint_{E(b)} F(x,y)dxdy = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4} \tag{9}$$

である。しかし $\lim_{a\to+0} D(a) = \lim_{b\to+0} E(b) = D$ であるから、(**??**) が存在するならば、それは上記の 2 つの極限の両方に一致していなければならない。しかし、それは不可能である。つまりこの場合 (**??**) は U の D への近づき方によって異なる極限をもつ。それで (**??**) の例 $F(x,y)$ は D で広義積分不可能であると言わなければならない。

したがって、どのような場合に (**??**) のような積分が U の D への近づき方によらずに同じ極限をもつかを考えなければならない。

実は 非負な関数で、ある近づけ方をしたときに極限をもつならば、どのような近づけ方をしても同じ極限に収束することが示せるのである。つまり $F(x,y)$ が D において非負の値をとる関数で $D_n \to D (n\to\infty)$ となるある単調増加な有界閉領域の列 $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$ について $\int_{D_n} F(x,y)dxdy$ が L に収束するとならば (**??**) が成り立つ。

実際、別の単調増加な有界閉領域の列 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \to D$ をとっても $\iint_{E_n} F(x,y)dxdy$ が L に収束することを示せばよいのだが、E_n は単調増加で D に近づくから任意の m について、 n を十分大きくとれば

$$D_m \subset E_n \subset D$$

が成り立つ。さらに、 ℓ を十分大きくとれば

$$D_m \subset E_n \subset D_\ell \subset D$$

も成り立つ。F は非負の値をとるから

$$\iint_{D_m} F(x,y)dxdy \le \iint_{E_n} F(x,y)dxdy \le \iint_{D_\ell} F(x,y)dxdy \le L$$

が成り立つ。 m はいくらでも大きくとれるが、そのとき $\iint_{D_m} F(x,y)dxdy$ は L に近づくから $\iint_{E_n} F(x,y)dxdy$ も L に近づかなければならないことがわかる。

Example 1.1.

$$\iint_{x,y\ge 0} \frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2}$$

を求める。$D(R) = \{x, y \ge 0, x^2+y^2 \le R^2\}$ とおく。$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくと $D(R)$ は $E(R) = \{0 \le r \le R, 0 \le \theta \le \pi/2\}$ に移り、かつ $(x,y) = (0,0), R = 0$ を除いて全単射となる。よって

$$\begin{aligned}\iint_{D(R)} \frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2} &= \iint_{E(R)} \frac{rdrd\theta}{1+r^4} \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{\pi/2} \frac{rd\theta}{1+r^4}\right) dr = \frac{\pi}{2}\int_0^R \frac{rdr}{1+r^4} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{R^2} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2}\arctan(R^2)\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{D(R)}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2}=\frac{\pi^2}{4}$$

となる。$\lim_{R\to+\infty}D(R)=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ かつ $1/(1+(x^2+y^2)^2)$ は非負であるから、この関数は $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ で広義積分可能で

$$\iint_{x,y\geq 0}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2}=\frac{\pi^2}{4}$$

が成り立つ。

この例に見られるように、有界閉領域 $D(R)$ と $E(R)$ 同士で変数変換が成り立つ場合、広義積分でも変数変換が行える。この例では

$$\iint_{x,y\geq 0}\frac{dxdy}{1+(x^2+y^2)^2}=\iint_{0\leq\theta\leq\pi/2,r\geq 0}\frac{rdrd\theta}{1+r^4}=\frac{\pi^2}{4}$$

が成り立つ。

では一般の関数ではどうか。 $F(x,y)$ を正の値をとる部分と負の値を取る部分に分けて

$$F_+(x,y)=\begin{cases}F(x,y) & (F(x,y)\geq 0),\\ 0 & (F(x,y)\leq 0),\end{cases}$$

$$F_-(x,y)=\begin{cases}|F(x,y)| & (F(x,y)\leq 0),\\ 0 & (F(x,y)\geq 0)\end{cases}$$

とおくと F_+,F_- はともに非負の値のみとり、

$$F(x,y)=F_+(x,y)-F_-(x,y)$$

がつねに成り立つ。F_+, F_- のそれぞれについて、先の考察を適用することで、次のことがわかる。

Theorem 1.2. F_+,F_- を先述のように定める。$D_1\subset D_2\subset\cdots\to D$ となる、ある単調増加な有界閉領域の列 (D_n) について $\iint_{D_n}F_+(x,y)dxdy$ が収束し、$E_1\subset E_2\subset\cdots\to D$ となる、ある単調増加な有界閉領域の列 (E_n) について $\iint_{E_n}F_-(x,y)dxdy$ が収束するならば $H_1\subset H_2\subset\cdots\to D$ となるどのような単調増加な有界閉領域の列 (H_n) をとっても $\iint_{H_n}F(x,y)dxdy$ は収束し、その収束値は H_n のとり方によらずに定まる。すなわち $F(x,y)$ は D で広義積分可能である。

あるいは $D^+=\{F(x,y)\geq 0\},D^-=\{F(x,y)\leq 0\}$ とおいて D^+,D^- それぞれで議論することで、次のようにいうこともできる。

Theorem 1.3. $D^+ = \{F(x,y) \geq 0\}, D^- = \{F(x,y) \leq 0\}$ とおく。$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \to D^+$ となる、ある単調増加な有界閉領域の列 (D_n) と $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \to D^-$ となる、ある単調増加な有界閉領域の列 (E_n) について $\iint_{D_i} F(x,y)dxdy \to L^+$, $\iint_{E_i} F(x,y)dxdy \to L^-$ ならば $F(x,y)$ は D で広義積分可能で

$$\iint_D F(x,y)dxdy = L^+ + L^-.$$

Example 1.4.

$$\iint_{[-1,2]\times[0,\infty]} \frac{xdxdy}{(1+x^2+y)^2}$$

を求める。$D(t) = [-1,0] \times [0,t] = \{-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq t\}$, $E(t) = [0,2] \times [0,t] = \{-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq t\}$ とおく。

$$\begin{aligned}\iint_{D(t)} \frac{xdxdy}{(1+x^2+y)^2} &= \int_{-1}^{0} \left(\int_0^t \frac{xdy}{(1+x^2+y)^2}\right) dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+t+x^2}dx \\ &= \int_1^0 \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1+t+z}dz = \log(2+t) - \log(1+t) - \log 2\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}\iint_{E(t)} \frac{xdxdy}{(1+x^2+y)^2} &= \int_0^2 \left(\int_0^t \frac{xdy}{(1+x^2+y)^2}\right) dx = \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+t+x^2}dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1+t+z}dz = \log 3 - \log(3+t) + \log(1+t)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\iint_{D(t)} \frac{xdxdy}{(1+x^2+y)^2} &\to -\log 2, \\ \iint_{E(t)} \frac{xdxdy}{(1+x^2+y)^2} &\to \log 3.\end{aligned}$$

$D^- = [-1,0] \times [0,+\infty) = \lim_t D(t), D^+ = [0,2] \times [0,+\infty) = \lim_t E(t)$ において $F(x,y)$ は符号一定なので

$$\iint_{[-1,2]\times[0,\infty]} \frac{xdxdy}{(1+x^2+y)^2} = \log 3 - \log 2.$$

2　広義重積分と累次積分

広義重積分を 1 変数関数の広義積分を用いて累次積分する問題を考えると、状況は一層微妙なものとなる。

たとえば $c<t<d$ となる t に対して $[a,b]\times[c,t]$ において $F(x,y)$ が有界で、通常の意味で重積分可能であるとし、

$$\iint_{[a,b]\times[c,d)} F(x,y)dxdy = \lim_{t\to d-0}\iint_{[a,b]\times[c,t]} F(x,y)dxdy \tag{10}$$

が定まるとする（なお $d=+\infty$ でもよい。その場合 $t\to d-0$ は $t\to+\infty$ と読み替える）。x から先に累次積分する場合

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d)} F(x,y)dxdy &= \lim_{t\to d-0}\int_c^t\left(\int_a^b F(x,y)dx\right)dy\\ &= \int_c^{d-0}\left(\int_a^b F(x,y)dx\right)dy\end{aligned} \tag{11}$$

となり、1 変数の広義積分を用いて累次積分可能となるが（以下、1 変数の広義積分をあらわすために $d-0$ とかくことにする）、y から先に累次積分すると

$$\lim_{t\to d-0}\iint_{[a,b]\times[c,t]} F(x,y)dxdy = \lim_{t\to d-0}\int_a^b\left(\int_c^t F(x,y)dy\right)dx \tag{12}$$

となる。しかし、これが y による広義積分を、さらに x で累次積分したもの

$$\int_a^b\left(\int_c^{d-0} F(x,y)dy\right)dx = \int_a^b\left(\lim_{t\to d-0}\int_c^t F(x,y)dy\right)dx \tag{13}$$

と一致するかは必ずしも明らかではない。一般に

$$\lim_{t\to y_0}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b\left(\lim_{t\to y_0} f(x,t)\right)dx \tag{14}$$

が成り立つとは限らないからである。

広義積分を含む累次積分が可能であることの十分条件として、比較的容易にわかるものがある。まず

$$\int_c^{d-0} g(y)dy$$

が収束し、$a\le x\le b, c\le y<d$ のときつねに

$$|F(x,y)|\le g(y)$$

となる関数 $g(y)$ が存在するとき広義積分

$$\int_c^{d-0} F(x,y)dy$$

は $x\in[a,b]$ で**絶対一様収束**するという。

$x \in [a,b]$ において $\int_c^{d-0} F(x,y)dy$ が絶対一様収束するとき先の定義にあるような関数 $g(y)$ をとれば

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b \left(\int_c^{d-0} F(x,y)dy\right) dx - \int_a^b \left(\int_c^t F(x,y)dy\right) dx\right| \\
=&\left|\int_a^b \left(\int_t^{d-0} F(x,y)dy\right) dx\right| \le \int_a^b \left(\int_t^{d-0} |F(x,y)|\,dy\right) dx \\
\le& \int_a^b \left(\int_t^{d-0} g(y)dy\right) dx \le (b-a)\int_t^{d-0} g(y)dy
\end{aligned} \tag{15}$$

となるが $\int_c^t g(y)dy, t \to d-0$ は収束するので

$$\int_t^{d-0} g(y)dy = \int_c^{d-0} g(y)dy - \int_c^t g(y)dy \to 0(t \to d-0),$$

よって

$$\left|\int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dy\right) dx - \int_a^b \left(\int_c^t F(x,y)dy\right) dx\right| \to 0(t \to d-0) \tag{16}$$

である。このことから、次のことがわかる。

Theorem 2.1. $x \in [a,b]$ において $\int_c^{d-0} F(x,y)dy$ が絶対一様収束すれば広義積分の意味において

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d)} F(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^{d-0} F(x,y)dy\right) dx = \int_c^{d-0} \left(\int_a^b F(x,y)dx\right) dy \tag{17}$$

が成り立つ。

さらに

$$G(t,y) = \int_a^t F(x,y)dx(a \le t \le b)$$

とおくと $F(t,y) = G_x(t,y)$ となるので $a \le t \le b$ において $\int_c^{d-0} F(t,y)dy$ が絶対一様収束すれば、通常の積分と微分の順序交換の議論から

$$\int_c^{d-0} F(t,y)dy = \int_c^{d-0} G_x(t,y)dy = \frac{\partial}{\partial t}\int_c^{d-0} G(t,y)dy$$

が成り立つことが分かる。つまりこの場合にも微分と積分の順序交換が可能であることが分かる。

Example 2.2.

$$\Gamma(K,L;s) = \int_K^L e^{-t}t^{s-1}dt,$$
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt = \lim_{K\to+0,L\to+\infty} \Gamma(K,L;s)$$

とおく。$s \geq 1$ のとき

$$\Gamma'(K, L; s) = \int_K^L (\partial/\partial s)(e^{-t}t^{s-1})dt = \int_K^L e^{-t}t^{s-1}\log t dt$$

が成り立つ。$T > 1$ を任意にとると $1 \leq s \leq T$ において $K \to +0, L \to +\infty$ とするとき、右辺の積分は絶対一様収束する。よって $s > 1$ のとき

$$\Gamma'(s) = \int_0^\infty (\partial/\partial s)(e^{-t}t^{s-1})dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\log t dt \tag{18}$$

が成り立つ。