重積分の応用

1 課題

1) 球体 $x^2+y^2+z^2 \leq 25$ のうち、 $x^2+y^2 \leq 16$ となる部分の体積を求めよ。(25 点)

2) $x, y, z \geq 0, 3x+2y+z \leq 6$ によってあらわされる立体の体積を求めよ。(25 点)

3) $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ であらわされる曲面の、 $x^2+y^2 \leq 9$ となる部分の面積を求めよ。(25 点)

4) 曲線 $y=\frac{1}{2}\sqrt{3(1-x^2)}, -1 \leq x \leq 1$ を x 軸のまわりに回転させて得られる回転面の面積を求めよ。(25 点)

2 解説

1) $x^2+y^2+z^2 \leq 25 \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{25-x^2-y^2}$ であるから、$D=\{x^2+y^2 \leq 25\}$ とおくと体積は $\iint_D 2\sqrt{25-x^2-y^2}dxdy$ とあらわされる。$E=\{0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とおく。$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, s=r^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\iint_D 2\sqrt{25-x^2-y^2}dxdy =& \iint_E r\sqrt{25-r^2}drd\theta \\ =& 2\int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{25-r^2}d\theta\right) dr \\ =& 4\pi\int_0^4 r\sqrt{25-r^2}dr\end{aligned}$$

$s=r^2$ とおくと、これは

$$2\pi\int_0^{16}\sqrt{25-s}ds=\frac{4\pi}{3}(25^{3/2}-9^{3/2})=\frac{392\pi}{3}$$

である。よって体積は $392\pi/3$ である。

2) $D = \{x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y \leq 6\}$ とおくと、この立体の体積は

$$\begin{aligned}\iint_D 6 - 3x - 2ydxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^{(6-3x)/2} 6 - 3x - 2ydy\right) dx \\ &= \int_0^2 \frac{(6-3x)^2}{4} dx = \frac{9}{4}\int_0^2 (2-x)^2 dx \\ &= 6.\end{aligned}$$

3) $z_x = -x/\sqrt{25 - x^2 - y^2}, z_y = -y/\sqrt{25 - x^2 - y^2}$ より $1 + z_x^2 + z_y^2 = 25/(25 - x^2 - y^2)$ である。よってこの曲面の、$x^2 + y^2 \leq 9$ となる部分の面積は

$$\iint_{x^2+y^2\leq 9} \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dxdy$$

であらわされる。 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, s = r^2$ とおくと、これは

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \frac{5r}{\sqrt{25 - r^2}} d\theta\right) dr &= 5\pi \int_0^3 \frac{2r}{\sqrt{25 - r^2}} dr = 5\pi \int_0^9 \frac{ds}{\sqrt{25 - s}} \\ &= 10\pi(\sqrt{25} - \sqrt{16}) = 10\pi\end{aligned}$$

と一致するから、該当部分の面積は 10π である。

4) 曲線 $y = \frac{1}{2}\sqrt{3(1 - x^2)}, -1 \leq x \leq 1$ を x 軸のまわりに回転させて得られる回転面の面積を求めよ。(25 点)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

だから、回転面の面積は

$$\begin{aligned}2\pi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3(1 - x^2)}}{2} \sqrt{1 + \frac{3x^2}{4(1 - x^2)}} dx &= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3(1 - x^2)}}{2} \sqrt{\frac{4 - x^2}{4(1 - x^2)}} dx \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx\end{aligned}$$

に一致する。 $x = 2y, y = \sin\theta(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ とおくと、最後の定積分は

$$\begin{aligned}4\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 - y^2} dy &= 4\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2\theta d\theta = 4\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\ &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\end{aligned}$$

に一致する。よって回転面の面積は

$$\frac{\pi^2\sqrt{3}}{3} + \frac{3\pi}{2}$$

である。