微分積分4 第1回〜第3回補足

2020年12月30日

1　二重積分の存在

$\mu(D)$ を領域 D の面積とする。厳密には $f(x), g(x)$ が $a \leq x \leq b$ において $g(x) \geq f(x)$ となっており、この区間で $g(x) - f(x)$ が積分可能な関数であり、領域 D が $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフ、および2つの縦線 $x = a, x = b$ で囲まれた領域であるときには

$$\mu(D) = \int_a^b g(x) - f(x) dx$$

と定める。C が曲線のとき $\mu(C) = 0$ とする。正確には $\mathbb{R}$ の部分集合 C を含む領域 D で $\mu(D)$ がいくらでも小さいものが取れるとき、$\mu(C) = 0$ と定める。

有界閉領域 D で有界で、面積0の部分を除いて連続な関数は二重積分 $\iint_D F(x,y)dx$ をもつことを言いたいが、まず次の事実を認めることにする。

定理 1 (Heine-Cantor の定理)**.** $F(x,y)$ が有界閉領域 D （通常単に領域というと閉領域をいうが、ここでは開領域と区別して、閉領域と明記する）において連続とする。D において距離 δ 以下の2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ について値の差 $|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)|$ の最大値を $g(\delta)$ とおくと $g(\delta) \to 0 (\delta \to 0)$ である。

連続であるとは、一点 (x_1, y_1) を決めたときにこの点との距離 δ 以下の点 (x_2, y_2) をとると、$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)|$ が δ とともに0に近づくことであった。上の定理では、2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ をどのように選んでも、2点間の距離が0に近づけば値の差も0に近づくというのである。これを**一様連続**という。閉領域でないときには、このような定理は一般には成り立たず、連続であることと一様連続であることは必ずしも一致しない。たとえば $F(x,y) = 1/(xy) (x, y > 0)$ は x, y が正のとき連続だが一様連続ではない。x 軸や y 軸の近くでは距離が近くても値の差は大きくなるからである。

このことを踏まえた上で、定理を述べる。

定理 2. $F(x,y)$ が有界閉領域 D において有界で、面積0の部分を除いて連続な関数ならば、二重積分 $\iint_D F(x,y)dx$ が定まる。

$F(x,y)$ が D において有界でないときには二重積分が定まらない場合がある。たとえば $-1 \leq x, y \leq 1$ で $F(x,y) = 1/(xy), 0 (xy = 0)$ と定義すると $F(x,y)$ は x 軸、y 軸以外の場所で連続だが、その近くでは急激に絶対値が増大するため二重積分が定まらない。

Proof. D に含まれる閉領域で、不連続点を含まないものを任意にとってそれを E_0 とする。

D の分割 $D = \cup_{i=1}^n D_i$ におけるリーマン和

$$\sum_{i=1}^n F(x_i, y_i)\mu(D_i)$$

をとる。S を D_i が D_0 に含まれる添え字 i 全体の集合、T をそれ以外の添え字 i 全体の集合とし E_1 を E_0 以外の点を含まない D_i 全体からなる領域とする。E_2 を E_0 以外の点を含む D_i 全体からなる領域とする。つまり $E_1 = \cup_{i\in S} D_i, E_2 = \cup_{i\in T} D_i$ である。もちろん E_1 は E_0 の部分集合である。

すると

$$\sum_{i=1}^n F(x_i, y_i)\mu(D_i) = \sum_{i\in S} F(x_i, y_i)\mu(D_i) + \sum_{i\in T} F(x_i, y_i)\mu(D_i) \tag{1.1}$$

が成り立つ。

D_i において $F(x, y)$ の最小値を $F(s_i, t_i)$, 最大値を $F(u_i, v_i)$ とおく。このとき

$$\sum_{i\in S} F(s_i, t_i)\mu(D_i) \le \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i)\mu(D_i) \le \sum_{i\in S} F(u_i, v_i)\mu(D_i) \tag{1.2}$$

が成り立つ。また、$\mu(E_2) = \sum_{i\in T} \mu(D_i)$ だから、 D における $|F(x, y)|$ の最大値を M（仮定より $F(x, y)$ は有界なので、有界閉領域においては、 $|F(x, y)|$ の最大値が存在する）とおくと

$$\left|\sum_{i\in T} F(x_i, y_i)\mu(D_i)\right| \le M \sum_{i\in T} \mu(D_i) = M\mu(E_2) \tag{1.3}$$

が成り立つ。これらを (1.1) に代入すると

$$-M\mu(E_2)+\sum_{i\in S} F(s_i, t_i)\mu(D_i) \le \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i)\mu(D_i) \le M\mu(E_2)+\sum_{i\in S} F(u_i, v_i)\mu(D_i) \tag{1.4}$$

が成り立つ。左辺と右辺の差は大きくても

$$2M\mu(E_2) + \max_{i\in S}(F(u_i, v_i) - F(s_i, t_i))\mu(D_i) \tag{1.5}$$

である。Heine-Cantor の定理より $F(x, y)$ は E_0 では一様連続だから $E_1 = \cup_{i\in S} D_i$ でも一様連続なので、分割を細かくすれば $\max_{i\in S}(F(u_i, v_i) - F(s_i, t_i))$ は 0 に近づく。また E_2 は E_0 以外の点を含む D_i 全体からなる領域であるが、分割を細かくすれば E_2 は $E\backslash E_0$ に近づいていくから $\mu(E_2)$ は $\mu(D) - \mu(E_0)$ に近づいていく。D は面積 0 の部分を除いて連続だから、 $\mu(E_0)$ はいくらでも $\mu(D)$ に近づけることができる。よって分割を細かくすれば (1.5) の量は 0 に近づき、したがって (1.4) の左辺と右辺の差も 0 に近づいていく。これはリーマン和が収束することを意味する。 □

例 1. $F(x, y) = 1(|x| < 1), F(x, y) = -1/2(|x| \ge 1)$ と定義する。このとき領域 $D = \{-2 \le x, y \le 2$ において

$$\iint_D F(x, y)dxdy = 8 - 4 = 4.$$

実際リーマン和において $|x| < 1$ となる点のみからなる部分を S_1, $|x| > 1$ となる点のみからなる部分を S_2, $|x| = 1$ となる点を含む部分を S_3 とおくと、 $S_1 \to 8$, $S_2 \to -4$, $S_3 \to 0$ が確認できる。

2 二重積分と累次積分

二重積分と累次積分については、第1回の講義で解説したように、次の基本的な定理が存在する。

重積分 $\iint_D F(x,y)dxdy$ が存在し、$a \leq x \leq b$ ならば一変数の積分 $\int_c^d F(x,y)dy$ が存在するとする。このとき

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dy \right) dx \tag{2.1}$$

が成り立つ。

まず $D = [a,b] \times [c,d] = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ の形の領域を取り扱う。

証明 *1.*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

となる実数列 $x_0, x_1, \ldots, x_m,\ y_0, y_1, \ldots, y_n$ をとると $D_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}](0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1$ は D の分割となっている。そして $\mu(D_{i,j}) = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ である。よって $x_i \leq \alpha_{i,j} \leq x_{i+1}, y_j \leq \beta_{i,j} \leq y_j$ となる $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ をとると

$$S = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} F(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \tag{2.2}$$

はリーマン和となっている。重積分が存在することは仮定しているから、$m, n \to \infty, x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_j \to 0$ とすると S は重積分 $\iint_D F(x,y)dxdy$ に収束する。

それで、各 $D_{i,j}$ において $F(x,y)$ が最小値を取る (x,y) を $(s_{i,j}, t_{i,j})$、$F(x,y)$ が最大値を取る (x,y) を $(u_{i,j}, v_{i,j})$ とおくと

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} F(s_{i,j}, t_{i,j})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \to S \tag{2.3}$$

および

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} F(u_{i,j}, v_{i,j})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \to S \tag{2.4}$$

が成り立つ。

ところで各 x に対して、$y_j \leq y \leq y_{j+1}$ の範囲で $F(x_i, y)$ が最大値をとる y を $\eta_j(x)$（もちろんこれは x によって変化しうる）とおくと

$$\int_c^d F(x,y)dy \leq \sum_{j=0}^{n-1} F(x, \eta_j(x))(y_{j+1} - y_j) \tag{2.5}$$

となるから

$$\sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \int_c^d F(x_i, y)dy \leq \sum_{j=0}^{n-1} F(x_i, \eta_j(x_i))(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \tag{2.6}$$

となるが $(x_i, \eta_j(x_i))$ はもちろん D_{ij} に含まれるから、

$$\sum_{i=0}^{m-1}\int_c^d F(x_i,y)dy \leq \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(u_{i,j},v_{i,j})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) \tag{2.7}$$

が成り立つ。さらに左辺の極限は累次積分 $\int_a^b\left(\int_c^d F(x,y)dy\right)dx$ に一致する。右辺の極限は (2.4) より重積分 $\iint_D F(x,y)dxdy$ であるから両辺の極限を取ると

$$\int_a^b\left(\int_c^d F(x,y)dy\right)dx \leq \iint_D F(x,y)dxdy \tag{2.8}$$

が成り立つ。同様にして

$$\sum_{i=0}^{m-1}\int_c^d F(x_i,y)dy \geq \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(s_{i,j},t_{i,j})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) \tag{2.9}$$

が成り立つことから (2.3) を使って

$$\int_a^b\left(\int_c^d F(x,y)dy\right)dx \geq \iint_D F(x,y)dxdy \tag{2.10}$$

がわかる。(2.8), (2.10) より

$$\int_a^b\left(\int_c^d F(x,y)dy\right)dx = \iint_D F(x,y)dxdy \tag{2.11}$$

がいえる。　□

証明 *2.*

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} F(x_i,y_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) \tag{2.12}$$

はリーマン和となるから

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \iint_D F(x,y)dxdy \tag{2.13}$$

となる。一方、

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m-1}\left[\sum_{j=0}^{n-1} F(x_i,y_j)(y_{j+1}-y_j)\right](x_{i+1}-x_i) \tag{2.14}$$

であるが、ひとつひとつの i について j に関する和の部分をみると $F(x_i,y)$ の $c \leq y \leq d$ におけるリーマン和となっているから

$$\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)\int_c^d F(x,y)dy \tag{2.15}$$

が成り立つ。ここで、さらに $m\to\infty$ とおくと、極限は

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\right) = \int_a^b\left(\int_c^d F(x,y)dy\right)dx \tag{2.16}$$

と累次積分であらわされる。

(2.13) と (2.16) を比較すると、

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\right) \tag{2.17}$$

がいえればよいことがわかる。両辺は似ているが、左辺では m,n は同時に無限大に向かうのに対し、右辺では先に n だけが無限大に向かい、それによって得られた極限は m による実数列となり、 m が無限大に向かう。

一般的に、与えられた実数列 $a_{m,n}$ について $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{m,n})$ が存在するからといって $\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n}$ が存在するかすら定かではない。たとえば $a_{m,n} = m/n(m,n = 1,2,\ldots)$ とすると $\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = 0$ であるから $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{m,n})$ も 0 となる。しかし $m = n$ という関係が成り立つように m,n を無限大へ向かわせると $a_{m,n} \to 1$ であるから $\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n}$ という極限は存在しない。

しかし、各 m に対して $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ が存在し、かつ、極限 $\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n} = A$ が存在するならば、それは $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{m,n})$ と一致しなければならないことが次のようにわかる。

M,N を大きく取れば $m > M, n > N$ のとき $a_{m,n}$ は A に近くなる。式であらわすと $|a_{m,n} - A| \leq \epsilon$ となる正の小さな実数 $\epsilon > 0$ がとれる。よって極限 $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ も A に近くなければならない。すなわち $m > M$ ならば $|(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}) - A| \leq \epsilon$ となる。M を大きく取ればとるほど、 ϵ はいくらでも 0 に近づくようとれるから $m\to\infty$ のとき $(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}) \to A$ となる。つまり

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right) = A = \lim_{m,n\to\infty} a_{m,n} \tag{2.18}$$

が成り立つ。これを $S_{m,n}$ に適用することで (2.17) がいえて、定理が証明された。 □

また、同様にして、重積分 $\iint_D F(x,y)dxdy$ が存在し、$c \leq y \leq d$ ならば一変数の積分 $\int_a^b F(x,y)dx$ が存在するとすれば、

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)dx\right) dy \tag{2.19}$$

となることもわかる。

一般の領域 D を考え、D が $a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)$ とあらわされているとする。重積分 $\iint_D F(x,y)dxdy$ が存在し、$a \leq x \leq b$ ならば一変数の積分 $\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy$ が存在するとする。このとき

$$\iint_D F(x,y)dx = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy\right) dx \tag{2.20}$$

が成り立つ。

Proof. 一般の領域については $F_0(x,y) = F(x,y)(x\in D), 0(x \notin D)$ と定義する。

D を含む長方形の領域 $D_0 = [a,b]\times[c,d]$ をとる。つまり $a \leq x \leq b$ においてつねに $c \leq f(x) \leq g(x) \leq d$ が成り立つようにする。

$F_0(x,y)$ は D においては $F(x,y)$ と一致するが、D に属さないところでは 0 をとる。もちろん D で積分する限り両者の積分は一致する。しかし $F_0(x,y)$ は D を含んでいればどのような領域で積分しても $\iint_D F_0(x,y)dxdy = \iint_D F(x,y)dxdy$ と一致する。つまり

$$\iint_D F(x,y)dx = \iint_D F_0(x,y)dxdy = \iint_{D_0} F_0(x,y)dxdy \tag{2.21}$$

が成り立つ（当然ながら $F(x,y)$ は D に属さないところでも 0 でない値を取りうるから $\iint_D F(x,y)dxdy = \iint_{D_0} F(x,y)dxdy$ は一般には成り立たない）。$D_0 = [a,b] \times [c,d]$ の形の領域では重積分と累次積分が一致することは確かめたから

$$\iint_{D_0} F_0(x,y)dx = \int_a^b \left(\int_c^d F_0(x,y)dy \right) dx \tag{2.22}$$

が成り立つ。 $f_0(x)$ の定義から $f(x) \leq y \leq g(x)$ のとき $F_0(x,y) = F(x,y)$、そうでないとき $F_0(x,y) = 0$ が成り立つから

$$\int_a^b \left(\int_c^d F_0(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy \right) dx \tag{2.23}$$

となる。(2.21), (2.22), (2.23) から

$$\iint_D F(x,y)dx = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy \right) dx \tag{2.24}$$

であることがいえる。 □

3 順序交換

二重積分と累次積分の一致を利用すれば

$$\int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)dx \right) dy \tag{3.1}$$

となることがわかる。より一般的に領域 D が 4 つの関数 $y = f(x), y = g(x), x = \varphi(y), x = \psi(y)$ を用いて $\{a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ および $\{c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ と 2 通りにあらわされているとき

$$\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} F(x,y)dx \right) dy \tag{3.2}$$

が成り立つ。

例 2.

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{-y^2} dy \right) dx. \tag{3.3}$$

e^{-y^2} の原始関数は初等関数ではあらわせない（$2/\sqrt{\pi}$ 倍したものは誤差関数と呼ばれ、正規分布の累積分布関数にあらわれる）。しかし、

$$0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y$$

と言い換えられるから $D=\{0\leq x\leq 1, x\leq y\leq 1\}$ は $D=\{0\leq y\leq 1, 0\leq x\leq y$ とあらわされ

$$\int_0^1\left(\int_x^1 e^{-y^2}dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^y e^{-y^2}dx\right)dy \tag{3.4}$$

となる。e^{-y^2} は x にはよらないから x に関する積分としては、これは単なる定数関数の積分となり、

$$\int_0^1\left(\int_0^y e^{-y^2}dx\right)dy=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=1-e^{-1} \tag{3.5}$$

がわかる。

$F(x,y)$ の偏微分 $F_y(x,y)$ が $[a,b]\times[c,d]$ で重積分可能、かつ $g(y)=\int_a^b F_y(x,y)dx$ で定まる関数について、 $c\leq y\leq d$ となる y に対して積分 $\int_c^y g(y)dy$ および $\int_a^b F(x,y)-F(x,c)dx$ が定まるとする。このとき累次積分の順序交換を用いて $g(y)=\int_a^b F_y(x,y)dx$ を求めることができる。つまり

$$\int_c^y\left(\int_a^b F_y(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^y F_y(x,y)dy\right)dx=\int_a^b F(x,y)-F(x,c)dx=\int_a^b F(x,y)dx-\int_a^b F(x,c)dx \tag{3.6}$$

であるから、これを y で微分すると

$$\int_a^b F_y(x,y)dx=\frac{d}{dy}\int_a^b F(x,y)dx \tag{3.7}$$

が得られる。

例 3.

$$\int\frac{dx}{s^2+x^2}=\int\frac{dy}{1+y^2}=\arctan y+C=\frac{1}{s}\arctan\frac{x}{s}+C(y=x/s) \tag{3.8}$$

を s で微分すると

$$\int\frac{dx}{(s^2+x^2)^2}=-\frac{1}{s^2}\arctan\frac{x}{s}-\frac{x}{s(s^2+x^2)}+C \tag{3.9}$$

が得られる。