Machinの公式 & 素因数分解

Tomohiro Yamada

Jan 27, 2018

（大阪大学 2013 年理系挑戦枠）

$3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。

$$x^2 + 1 = 2^a 5^b 13^c, x > 0$$

となる整数 (x, a, b, c) をすべて求めよ。たとえば $1^2 + 1 = 2, 2^2 + 1 = 5, 3^2 + 1 = 2 \times 5, 5^2 + 1 = 2 \times 13, \ldots$

そもそも無限個か有限個かも明らかではない！

一見無関係な2つの問題が
密接につながっている！

Størmer, 1897: 解は上記の例に加えて

$$\begin{aligned} 7^2+1 &= 2\times 5^2, \\ 8^2+1 &= 5\times 13, \\ 18^2+1 &= 5^2\times 13, \\ 57^2+1 &= 2\times 5^3\times 13, \\ 239^2+1 &= 2\times 13^4 \end{aligned}$$

の計9個。

最初の問題…実は誘導問題が存在している！

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1 - x^{4n}}{1 + x^2} dx,$$

$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1 + x^{4n+2}}{1 + x^2} dx$$

とおく。

（大阪大学2013年理系挑戦枠）

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{12}$ を証明せよ。

(2) $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。ただし $1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$ である。

$$a_n < \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{12} < b_n$$

および

$$3.141 < 12a_2 < \pi < 12b_2 < 3.142$$

より証明できる。

不満点: $\sqrt{3}$ の近似値を使ってしまっている。

このような情報を使わずに証明できないか？

Machinの公式

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.}$$

先程と同様に

$$\int_0^u \frac{1-x^{4n}}{1+x^2}dx < \arctan u < \int_0^u \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2}dx$$

だから

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} < \arctan u < u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}.$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} >&4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\times 5^3}+\frac{1}{5\times 5^5}-\frac{1}{7\times 5^7}\right)-\frac{1}{239}\\ >&0.78539,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} <&4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\times 5^3}+\frac{1}{5\times 5^5}\right)-\frac{1}{239}+\frac{1}{3\times 239^3}\\ <&0.7854\end{aligned}$$

より

$$3.14156 < \pi < 3.1416.$$

$\boxed{\text{Machinの公式の証明}}$

$$\theta = \arctan\frac{1}{5}, \psi = \arctan\frac{1}{239}$$

および

$$\tan(4\theta + \psi) = 1, 0 < 4\theta + \psi < \frac{4}{5} + \frac{1}{239} < 1.$$

複素数で考えてみよう

$$\frac{(5+\sqrt{-1})^4}{239+\sqrt{-1}} = 2(1+\sqrt{-1})$$

より

$$
\begin{aligned}
&4\arg(5+\sqrt{-1})-\arg(239+\sqrt{-1})\\
=&4\arg(5+\sqrt{-1})+\arg(239-\sqrt{-1})\\
=&\arg(1+\sqrt{-1}).
\end{aligned}
$$

ここで

$$\arctan\frac{y}{x} = \arg(x + y\sqrt{-1})$$

を使ってMachinの公式が出てくる！

絶対値を取ることで

$$(5^2+1)^4 = 2^3(239^2+1)$$

に対応する！

$5^2+1, 239^2+1$ を素因数分解すると

$5^2+1 = 26 = 2\times 13, 239^2+1 = 57122 = 2\times 13^4$

となって、共に 2×13^n の形をしていることからこのような関係式が出てくる。

Machinの公式の一般化

$$\frac{k\pi}{4} = \sum_{j=1}^{n} a_j \arctan \frac{1}{t_j}$$

ならば

$$\arg \prod_{j=1}^{n} (t_j + \sqrt{-1})^{a_j} = \sum a_j \arg(t_j + \sqrt{-1}) = \frac{k\pi}{4}.$$

$$\operatorname{arg}\frac{t_j+\sqrt{-1}}{t_j-\sqrt{-1}} = \operatorname{arg}(t_j+\sqrt{-1}) - \operatorname{arg}(t_j-\sqrt{-1})$$
$$= 2\operatorname{arg}(t_j+\sqrt{-1})$$

より

$$\operatorname{arg}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{t_j+\sqrt{-1}}{t_j-\sqrt{-1}}\right)^{a_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \operatorname{arg}\frac{t_j+\sqrt{-1}}{t_j-\sqrt{-1}} = \frac{k\pi}{2}.$$

さらに

$$\left|\frac{t_j + \sqrt{-1}}{t_j - \sqrt{-1}}\right| = 1$$

を使うと

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{t_j + \sqrt{-1}}{t_j - \sqrt{-1}}\right)^{a_j} = \pm 1, \pm\sqrt{-1}.$$

ここで

$$t_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_{ij}} (1 \leq j \leq n)$$

と素因数分解すると…

重要な事実（Fermat の２素数定理）：

素数 p_i がある n^2+1 の素因数である

$\Leftrightarrow p_i = 2$ または $4m+1$

$\Leftrightarrow \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ で $p_i = \pi_i \bar{\pi}_i$ と分解される

よって

$$t_j+\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^{e_{0j}}(1+\sqrt{-1})^{\delta_j}\prod_{i=1}^{m}(\pi_i \text{ または } \bar{\pi}_i)^{e_{ij}}$$

とおくことができ、

$$\frac{t_j+\sqrt{-1}}{t_j-\sqrt{-1}}=(\sqrt{-1})^{2e_{0j}+\delta_j}\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\bar{\pi}_i}{\pi_i}\right)^{\pm e_{ij}}.$$

そうすると

$$\sum_{j=1}^{n} a_j e_{ij} = 0 (i = 1, 2, \ldots, m)$$

が成り立つ！

ここで $m \geq n$ のとき

$$\xi_l = \prod_{i=1}^{m} \pi_i^{f_{il}} (1 \leq l \leq n-1)$$

をうまくとれば

$$\frac{t_j + \sqrt{-1}}{t_j - \sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^{2e_{0j}+\delta_1} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\bar{\xi}_i}{\xi_i}\right)^{\pm g_{ij}} (1 \leq j \leq n)$$

となる。

そうすると

$$t_j+\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^{e_{0j}}(1+\sqrt{-1})^{\delta_j}\prod_{i=1}^{n-1}(\xi_i \text{ または } \bar{\xi}_i)^{g_{ij}}$$

および

$$\sum_{j=1}^{n} a_j g_{ij} = 0(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

が成り立つ。

整数の言葉で書き直すと…

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \arctan \frac{1}{t_j} = \frac{k\pi}{4}$$

となる整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, k$ が存在するとき

$$t_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} \prod_{i=1}^{n-1} A_i^{g_{ij}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

となる整数 $A_i(1 \leq i \leq n-1), \delta_j(1 \leq j \leq n), g_{ij}(1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n)$ が存在する。さらに $t_j \pm t_k \equiv 0 \pmod{A_i}$ が常に成り立つ。

Størmer (1895):

$$t_1^2+1=2^{\delta_1}A^{g_1}, t_2^2+1=2^{\delta_2}A^{g_2}$$

の解で合同式 $t_1 \pm t_2 \equiv 0 \pmod{A}$ が成り立つものは

$$3^2+1=2\times 5, 7^2+1=2\times 5^2$$

および

$$5^2+1=2\times 13, 239^2+1=2\times 13^4$$

のみである。

Størmer (1895):

$$t^2 + 1 = 2A^g, t > 1$$

ならば g は奇数。

M. Lebesgue (1850):

$$t^2 + 1 = A^g$$

の整数解は $t = 0, A^g = 1$ 以外に存在しない。

あとは g_1, g_2 が 2 の累乗の場合を考える。

なお

$$t^2 + 1 = 2u^4$$

の正の整数解は $(t, u) = (1, 1), (239, 13)$ のみだが、
1942年にLjunggrenによってようやく証明された！

$n \geq 3$ のときは？

Størmer (1896):

$$a \arctan \frac{1}{x} + b \arctan \frac{1}{y} = c \arctan \frac{1}{z}$$

は無限に多くの解が存在する！

たとえば

$$\arctan\frac{1}{x}=\arctan\frac{1}{x+a}+\arctan\frac{a}{x^2+ax+1}$$

で a が x^2+1 の約数となるようにとる。

$$
\begin{aligned}
\arctan\frac{1}{t} &= \arctan\frac{1}{t+1} + \arctan\frac{1}{t^2+t+1},\\
\arctan\frac{1}{2t-1} &= \arctan\frac{1}{2t+1} + \arctan\frac{1}{2t^2},\\
\arctan\frac{1}{5t-2} &= \arctan\frac{1}{5t+3} + \arctan\frac{1}{5t^2+t-1},\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

$$a \arctan\frac{1}{x} + b\arctan\frac{1}{y} + c\arctan\frac{1}{z} = k\frac{\pi}{4}$$

かつ $k \neq 0$ の場合は？

有限個しか存在しないことが示せそうな状況（2018年1月現在）。

$$t^2 + 1 = 2^\delta \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$$

の整数解をどのようにして見つけるか?

Størmer (1897)

各 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ に対し、最高でも $2 \times 3^m - 2^m$ 個の解しか存在しない。

Pell方程式

各 e_i は

$$e_i = u_i + 2v_i,$$

ただし

$$\begin{aligned} e_i = 0 \text{ のとき } u_i &= 0, \\ e_i \text{ が奇数のとき } u_i &= 1, \\ e_i > 0 \text{ かつ } e_i \text{ が偶数のとき } u_i &= 2 \end{aligned}$$

の形に一意的にあらわせる。

$D = 2^{\delta}\prod_{i=1}^{m} p_i^{u_i}, y = \prod_{i=1}^{m} p_i^{v_i}$ とおくと

$$t^2 - Dy^2 = -1 \text{ かつ } [v_i > 0 \Rightarrow u_i > 0]$$

つまり

$$p \mid y \Rightarrow p \mid D$$

である。

かくして問題はPell方程式の問題に帰着する!

Størmer は

$$t^2 - Dy^2 = -1$$

の解で

$$p \mid y \Rightarrow p \mid D$$

となるものは、この Pell 方程式の最小解でなければならないことを示した。

$\delta, u_1, u_2, \ldots, u_m$ を決めれば、

$$t^2 + 1 = 2^\delta \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}, t > 0$$

の整数解はあっても 1 つだけ。

たとえば

$$t^2 + 1 = 2^\delta p^e q^f, t > 0$$

の整数解はたかだか 14 個しかなく、それらは 14 個の Pell 方程式の最小解を確かめれば、すべて求めることができる。

$$t^2 + 1 = 2^a 5^b 13^c,$$

の整数解は9個のみ。

またこの定理から

$$t^2 + 1 = 2A^{2^k}, k > 0$$

の解はたかだか1個しかないことがわかる。ここから先述のMachinの公式に関する結果の、より簡単な証明が得られる。

たとえば

$$t^2 + 1 = p^e q^f$$

の解はたかだか5つしかない！

References

W. Ljunggren, *Zur theorie der Gleichung* $X^2 + 1 = DY^4$, Avh. Norske, Vid. Akad. Oslo **1**, No. 5 (1942).

Carl Størmer, *Solution compléte en nombres entiers* m, n, x, y, k *de l'équation* m*arc tg*$\frac{1}{x} + n$*arc tg*$\frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$, Skrift. Vidensk. Christiania I. Math. -naturv. Klasse (1895), Nr. 11, 21 pages.

Carl Størmer, *Quelques théorèmes sur l'équation de Pell* $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ *et leurs applications*, Skrift. Vidensk. Christiania I. Math. -naturv. Klasse (1897), Nr. 2, 48 pages.

MANY THANKS
FOR YOUR ATTENTION

To be continued...?

Tomohiro Yamada
Center for Japanese language and culture
Osaka University
562-8558
8-1-1, Aomatanihigashi, Minoo, Osaka
Japan
e-mail: tyamada1093@gmail.com