円周率の近似値～悪問から始める不定方程式論～

Tomohiro Yamada

Oct 27, 2019 (Revised in Oct 29, 2019

悪問を解いてみた

本学で出題された問題

（大阪大学 2013 年理系挑戦枠）

$3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。

誘導問題

実は誘導問題が存在している！

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1 - x^{4n}}{1 + x^2} dx,$$

$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1 + x^{4n+2}}{1 + x^2} dx$$

とおく

（大阪大学 2013 年理系挑戦枠）

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{12}$ を証明せよ。
- $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。ただし $1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$ である。

実は誘導問題が存在している！

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1-x^{4n}}{1+x^2} dx,$$

$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2} dx$$

とおく

（大阪大学 2013 年理系挑戦枠）

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{12}$ を証明せよ。
- $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。ただし $1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$ である。

実は誘導問題が存在している！

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1 - x^{4n}}{1 + x^2} dx,$$

$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1 + x^{4n+2}}{1 + x^2} dx$$

とおく

（大阪大学 2013 年理系挑戦枠）

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{12}$ を証明せよ。
- $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。ただし $1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$ である。

誘導問題

実は誘導問題が存在している！

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1 - x^{4n}}{1 + x^2} dx,$$

$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1 + x^{4n+2}}{1 + x^2} dx$$

とおく

（大阪大学 2013 年理系挑戦枠）

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{12}$ を証明せよ。
- $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。ただし $1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$ である。

誘導問題

実は誘導問題が存在している！

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1-x^{4n}}{1+x^2}dx,$$

$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2}dx$$

とおく

（大阪大学 2013 年理系挑戦枠）

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{12}$ を証明せよ。
- $3.141 < \pi < 3.142$ を証明せよ。ただし $1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$ である。

証明

$$a_n < \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{12} < b_n$$

および

$$3.141 < 12a_2 < \pi < 12b_2 < 3.142$$

より証明できる。

証明

$$a_n < \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{12} < b_n$$

および

$$3.141 < 12a_2 < \pi < 12b_2 < 3.142$$

より証明できる。

不満点

- $\sqrt{3}$ の近似値を使ってしまっている。
- このような情報を使わずにより強い不等式を証明できないか？

不満点

- $\sqrt{3}$ の近似値を使ってしまっている。
- このような情報を使わずにより強い不等式を証明できないか？

悪問

（大阪大学 2013 年理系挑戦枠・改）

$3.14156 < \pi < 3.14163$ を証明せよ。

解（三角関数の関係）

$$
\begin{aligned}
(5+i)^4 &= (24+10i)^2 = 4(12+5i)^2 = 4(119+120i) \\
&= 2(1+i)(1-i)(119+120i) = 2(1+i)(239+i)
\end{aligned} \tag{1}
$$

の偏角をとり $\arctan\frac{y}{x} = \arg(x+yi)$ をつかって

$$4\arctan\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{239},$$

解（三角関数の関係）

$$
\begin{aligned}
(5+i)^4 &= (24+10i)^2 = 4(12+5i)^2 = 4(119+120i) \\
&= 2(1+i)(1-i)(119+120i) = 2(1+i)(239+i)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

の偏角をとり $\arctan\frac{y}{x} = \arg(x+yi)$ をつかって

$$
4\arctan\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{239},
$$

解（三角関数の関係）

$$
\begin{aligned}
(5+i)^4 &= (24+10i)^2 = 4(12+5i)^2 = 4(119+120i) \\
&= 2(1+i)(1-i)(119+120i) = 2(1+i)(239+i)
\end{aligned} \tag{1}
$$

の偏角をとり $\arctan \frac{y}{x} = \arg(x+yi)$ をつかって

$$
4\arctan\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{239},
$$

解（Machin の公式）

すなわち

公式 (Machin, 1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

.

解（三角関数の不等式）

$$\int_0^u \frac{1-x^{4n}}{1+x^2}dx < \int_0^u \frac{du}{1+u^2} < \int_0^u \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2}dx$$

だから

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} < \arctan u < u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}.$$

解（三角関数の不等式）

$$\int_0^u \frac{1-x^{4n}}{1+x^2}dx < \int_0^u \frac{du}{1+u^2} < \int_0^u \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2}dx$$

だから

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} < \arctan u < u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}.$$

解

よって

$$\frac{\pi}{4} > 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5\times 5^5} - \frac{1}{7\times 5^7}\right) - \frac{1}{239}$$
$$> 0.78539,$$

および

$$\frac{\pi}{4} < 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5\times 5^5}\right) - \frac{1}{239} + \frac{1}{3\times 239^3}$$
$$< 0.785406$$

より

$$3.14156 < \pi < 3.14163.$$

解

よって

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} >&4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\times 5^3}+\frac{1}{5\times 5^5}-\frac{1}{7\times 5^7}\right)-\frac{1}{239}\\ >&0.78539,\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} <&4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\times 5^3}+\frac{1}{5\times 5^5}\right)-\frac{1}{239}+\frac{1}{3\times 239^3}\\ <&0.785406\end{aligned}$$

より

$$3.14156 < \pi < 3.14163.$$

解

よって

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} >&4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\times 5^3}+\frac{1}{5\times 5^5}-\frac{1}{7\times 5^7}\right)-\frac{1}{239}\\ >&0.78539,\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} <&4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\times 5^3}+\frac{1}{5\times 5^5}\right)-\frac{1}{239}+\frac{1}{3\times 239^3}\\ <&0.785406\end{aligned}$$

より

$$3.14156 < \pi < 3.14163.$$

第 2 部

理論的背景

問題

この現象をどのように説明するか？ また一般化できるか？ つまり

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

の形の等式をどのように見つけ出すか？

この形の、現在知られている等式は Computing Pi, edited by Michael Roby Wetherfield and Hwang Chien-lih, http://www.machination.eclipse.co.uk/index.html に収録されている

問題

この現象をどのように説明するか？ またー般化できるか？ つまり

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

の形の等式をどのように見つけ出すか？

この形の、現在知られている等式は Computing Pi, edited by Michael Roby Wetherfield and Hwang Chien-lih, http://www.machination.eclipse.co.uk/index.html に収録されている

整数の素因数分解との関係

$(5+i)^4$ の等式の絶対値を取ることで (1) は

$$(5^2+1)^4 = 2^3(239^2+1)$$

に対応する！

$5^2+1, 239^2+1$ を素因数分解すると

$$5^2+1 = 26 = 2\times 13, 239^2+1 = 57122 = 2\times 13^4$$

となって、共に 2×13^n の形をしていることからこのような関係式が出てくる

整数の素因数分解との関係

$(5+i)^4$ の等式の絶対値を取ることで (1) は

$$(5^2+1)^4 = 2^3(239^2+1)$$

に対応する！
$5^2+1, 239^2+1$ を素因数分解すると

$$5^2+1 = 26 = 2\times 13, 239^2+1 = 57122 = 2\times 13^4$$

となって、共に 2×13^n の形をしていることからこのような関係式が出てくる

整数の素因数分解との関係

$(5+i)^4$ の等式の絶対値を取ることで (1) は

$$(5^2+1)^4 = 2^3(239^2+1)$$

に対応する！
$5^2+1, 239^2+1$ を素因数分解すると

$$5^2+1 = 26 = 2 \times 13, 239^2+1 = 57122 = 2 \times 13^4$$

となって、共に 2×13^n の形をしていることからこのような関係式が出てくる

素数と平方和

$p > 0$ が素数のとき

- $p = 2$ または $p \equiv 1 \pmod 4$ ならば正の整数 a, b により $p = a^2 + b^2$ つまり $p = (a + bi)(a - bi)$ の形に一意的に表せる
- $p \equiv 3 \pmod 4$ ならば p は $a^2 + b^2$ の形にあらわせない

また

$x^2 + 1$ の素因数は p は $p = 2$ または $p \equiv 1 \pmod 4$

素数と平方和

$p > 0$ が素数のとき

- $p = 2$ または $p \equiv 1 \pmod 4$ ならば正の整数 a, b により $p = a^2 + b^2$ つまり $p = (a + bi)(a - bi)$ の形に一意的に表せる
- $p \equiv 3 \pmod 4$ ならば p は $a^2 + b^2$ の形にあらわせない

また

$x^2 + 1$ の素因数は p は $p = 2$ または $p \equiv 1 \pmod 4$

$\mathbf{Z}[i]$ でも素因数分解が一意的に可能、つまり

- $x + yi = \epsilon \prod_{s=1}^{m} (a_s + b_s i)^{g_s} \prod_{s=m+1}^{n} p_s^{g_s}$,
- $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$,
- $p_s (s = m+1, 2, \ldots, n) \equiv 3 \pmod 4$ は相異なる、通常の素数
- $a_s, b_s, g_s \in \mathbf{Z}, g_j \geq 0$,
- 各 $a_s + b_s i$ は $\mathbf{Z}[i]$ 上の相異なる素数（$\pm 1, \pm i$ と自分自身に $\pm 1, \pm i$ をかけたもの以外の約数を $\mathbf{Z}[i]$ にもたない))

という形に順序や $\pm 1, \pm i$ 倍の別を除いて一意的に表示できる

$\mathbf{Z}[i]$ でも素因数分解が一意的に可能、つまり

- $x + yi = \epsilon \prod_{s=1}^{m}(a_s + b_s i)^{g_s} \prod_{s=m+1}^{n} p_s^{g_s}$,
- $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$,
- $p_s (s = m+1, 2, \ldots, n) \equiv 3 \pmod 4$ は相異なる、通常の素数
- $a_s, b_s, g_s \in \mathbf{Z}, g_j \geq 0$,
- 各 $a_s + b_s i$ は $\mathbf{Z}[i]$ 上の相異なる素数（$\pm 1, \pm i$ と自分自身に $\pm 1, \pm i$ をかけたもの以外の約数を $\mathbf{Z}[i]$ にもたない））

という形に順序や $\pm 1, \pm i$ 倍の別を除いて一意的に表示できる

$\mathbf{Z}[i]$ でも素因数分解が一意的に可能、つまり

- $x+yi=\epsilon\prod_{s=1}^{m}(a_s+b_si)^{g_s}\prod_{s=m+1}^{n}p_s^{g_s}$,
- $\epsilon=\pm1$ または $\pm i$,
- $p_s(s=m+1,2,\ldots,n)\equiv 3 \pmod 4$ は相異なる、通常の素数
- $a_s, b_s, g_s\in\mathbf{Z}, g_j\geq 0$,
- 各 a_s+b_si は $\mathbf{Z}[i]$ 上の相異なる素数（$\pm1,\pm i$ と自分自身に $\pm1,\pm i$ をかけたもの以外の約数を $\mathbf{Z}[i]$ にもたない)）

という形に順序や $\pm1,\pm i$ 倍の別を除いて一意的に表示できる

$\mathbf{Z}[i]$ でも素因数分解が一意的に可能、つまり

- $x + yi = \epsilon \prod_{s=1}^{m} (a_s + b_s i)^{g_s} \prod_{s=m+1}^{n} p_s^{g_s}$,
- $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$,
- $p_s (s = m+1, 2, \dots, n) \equiv 3 \pmod 4$ は相異なる、通常の素数
- $a_s, b_s, g_s \in \mathbf{Z}, g_j \geq 0$,
- 各 $a_s + b_s i$ は $\mathbf{Z}[i]$ 上の相異なる素数（$\pm 1, \pm i$ と自分自身に $\pm 1, \pm i$ をかけたもの以外の約数を $\mathbf{Z}[i]$ にもたない)）

という形に順序や $\pm 1, \pm i$ 倍の別を除いて一意的に表示できる

$\mathbf{Z}[i]$ でも素因数分解が一意的に可能、つまり

- $x + yi = \epsilon \prod_{s=1}^{m} (a_s + b_s i)^{g_s} \prod_{s=m+1}^{n} p_s^{g_s}$,
- $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$,
- $p_s (s = m+1, 2, \ldots, n) \equiv 3 \pmod 4$ は相異なる、通常の素数
- $a_s, b_s, g_s \in \mathbf{Z}, g_j \geq 0$,
- 各 $a_s + b_s i$ は $\mathbf{Z}[i]$ 上の相異なる素数（$\pm 1, \pm i$ と自分自身に $\pm 1, \pm i$ をかけたもの以外の約数を $\mathbf{Z}[i]$ にもたない))

という形に順序や $\pm 1, \pm i$ 倍の別を除いて一意的に表示できる

$\mathbf{Z}[i]$ でも素因数分解が一意的に可能、つまり

- $x + yi = \epsilon \prod_{s=1}^{m} (a_s + b_s i)^{g_s} \prod_{s=m+1}^{n} p_s^{g_s}$,
- $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$,
- $p_s (s = m + 1, 2, \ldots, n) \equiv 3 \pmod 4$ は相異なる、通常の素数
- $a_s, b_s, g_s \in \mathbf{Z}, g_j \geq 0$,
- 各 $a_s + b_s i$ は $\mathbf{Z}[i]$ 上の相異なる素数（$\pm 1, \pm i$ と自分自身に $\pm 1, \pm i$ をかけたもの以外の約数を $\mathbf{Z}[i]$ にもたない)）

という形に順序や $\pm 1, \pm i$ 倍の別を除いて一意的に表示できる

$\mathbf{Z}[i]$ でも素因数分解が一意的に可能、つまり

- $x + yi = \epsilon \prod_{s=1}^{m} (a_s + b_s i)^{g_s} \prod_{s=m+1}^{n} p_s^{g_s}$,
- $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$,
- $p_s (s = m+1, 2, \ldots, n) \equiv 3 \pmod 4$ は相異なる、通常の素数
- $a_s, b_s, g_s \in \mathbf{Z}, g_j \geq 0$,
- 各 $a_s + b_s i$ は $\mathbf{Z}[i]$ 上の相異なる素数（$\pm 1, \pm i$ と自分自身に $\pm 1, \pm i$ をかけたもの以外の約数を $\mathbf{Z}[i]$ にもたない)）

という形に順序や $\pm 1, \pm i$ 倍の別を除いて一意的に表示できる

$p_1, p_2, \ldots, p_r$ が通常の素数で $p_s = a_s^2 + b_s^2$ ならば、次の 3 つは同値である

- $x + i = \epsilon(a_1 \pm b_1 i)^{e_1}(a_2 \pm b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_r}$
- $x - i = \epsilon^{-1}(a_1 \mp b_1 i)^{e_1}(a_2 \mp b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \mp b_r i)^{e_r}$
- $x^2 + 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$

なお対応する符号は同順で $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$ とする
（3 つ目からあとの 2 つを導くには $a_s + b_s i$ が $x + i, x - i$ の一方を割り切るが、その場合 $a_s - b_s i$ が他方を割り切ること、また p_s が $x + i, x - i$ を同時に割り切ることは不可能であることに注意する）

$p_1, p_2, \ldots, p_r$ が通常の素数で $p_s = a_s^2 + b_s^2$ ならば、次の 3 つは同値である

- $x + i = \epsilon(a_1 \pm b_1 i)^{e_1}(a_2 \pm b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_r}$
- $x - i = \epsilon^{-1}(a_1 \mp b_1 i)^{e_1}(a_2 \mp b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \mp b_r i)^{e_r}$
- $x^2 + 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$

なお対応する符号は同順で $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$ とする
（3 つ目からあとの 2 つを導くには $a_s + b_s i$ が $x + i, x - i$ の一方を割り切るが、その場合 $a_s - b_s i$ が他方を割り切ること、また p_s が $x + i, x - i$ を同時に割り切ることは不可能であることに注意する）

$p_1, p_2, \ldots, p_r$ が通常の素数で $p_s = a_s^2 + b_s^2$ ならば、次の 3 つは同値である

- $x + i = \epsilon(a_1 \pm b_1 i)^{e_1}(a_2 \pm b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_r}$
- $x - i = \epsilon^{-1}(a_1 \mp b_1 i)^{e_1}(a_2 \mp b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \mp b_r i)^{e_r}$
- $x^2 + 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$

なお対応する符号は同順で $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$ とする
（3 つ目からあとの 2 つを導くには $a_s + b_s i$ が $x + i, x - i$ の一方を割り切るが、その場合 $a_s - b_s i$ が他方を割り切ること、また p_s が $x + i, x - i$ を同時に割り切ることは不可能であることに注意する）

$p_1, p_2, \ldots, p_r$ が通常の素数で $p_s = a_s^2 + b_s^2$ ならば、次の 3 つは同値である

- $x + i = \epsilon(a_1 \pm b_1 i)^{e_1}(a_2 \pm b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_r}$
- $x - i = \epsilon^{-1}(a_1 \mp b_1 i)^{e_1}(a_2 \mp b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \mp b_r i)^{e_r}$
- $x^2 + 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$

なお対応する符号は同順で $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$ とする
（3 つ目からあとの 2 つを導くには $a_s + b_s i$ が $x + i, x - i$ の一方を割り切るが、その場合 $a_s - b_s i$ が他方を割り切ること、また p_s が $x + i, x - i$ を同時に割り切ることは不可能であることに注意する）

Gauss 整数

$p_1, p_2, \ldots, p_r$ が通常の素数で $p_s = a_s^2 + b_s^2$ ならば、次の 3 つは同値である

- $x + i = \epsilon(a_1 \pm b_1 i)^{e_1}(a_2 \pm b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_r}$
- $x - i = \epsilon^{-1}(a_1 \mp b_1 i)^{e_1}(a_2 \mp b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \mp b_r i)^{e_r}$
- $x^2 + 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$

なお対応する符号は同順で $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$ とする

（3 つ目からあとの 2 つを導くには $a_s + b_s i$ が $x + i, x - i$ の一方を割り切るが、その場合 $a_s - b_s i$ が他方を割り切ること、また p_s が $x + i, x - i$ を同時に割り切ることは不可能であることに注意する）

$p_1, p_2, \ldots, p_r$ が通常の素数で $p_s = a_s^2 + b_s^2$ ならば、次の 3 つは同値である

- $x + i = \epsilon(a_1 \pm b_1 i)^{e_1}(a_2 \pm b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_r}$
- $x - i = \epsilon^{-1}(a_1 \mp b_1 i)^{e_1}(a_2 \mp b_2 i)^{e_2} \cdots (a_r \mp b_r i)^{e_r}$
- $x^2 + 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$

なお対応する符号は同順で $\epsilon = \pm 1$ または $\pm i$ とする
（3 つ目からあとの 2 つを導くには $a_s + b_s i$ が $x + i, x - i$ の一方を割り切るが、その場合 $a_s - b_s i$ が他方を割り切ること、また p_s が $x + i, x - i$ を同時に割り切ることは不可能であることに注意する）

有理整数から Gauss 整数へ

- $n > r$ とする
- $p_1, p_2, \ldots, p_r$ を 4 を法として 1 と合同な素数とし
  $p_s = a_s^2 + b_s^2 (a_s, b_s > 0)$ と 2 つの平方数の和で表す
- $x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{e_{1j}} p_2^{e_{2j}} \cdots p_r^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする

このとき

$$x_j + i = (1 \pm i)^{\delta_j} (a_1 \pm b_1 i)^{e_{1j}} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

より

$$\frac{x_j + i}{x_j - i} = i^{\pm\delta_j} \eta_1^{\pm e_{1j}} \eta_2^{\pm e_{2j}} \cdots \eta_r^{\pm e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ここで $\eta_s = (a_s + b_s i)/(a_s - b_s i)$ で指数 e_{sj} の符号は対応する $a_s \pm b_s i$ の符号と一致する

有理整数から Gauss 整数へ

- $n > r$ とする
- $p_1, p_2, \ldots, p_r$ を 4 を法として 1 と合同な素数とし $p_s = a_s^2 + b_s^2 (a_s, b_s > 0)$ と 2 つの平方数の和で表す
- $x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{e_{1j}} p_2^{e_{2j}} \cdots p_r^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする

このとき

$$x_j + i = (1 \pm i)^{\delta_j} (a_1 \pm b_1 i)^{e_{1j}} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

より

$$\frac{x_j + i}{x_j - i} = i^{\pm\delta_j} \eta_1^{\pm e_{1j}} \eta_2^{\pm e_{2j}} \cdots \eta_r^{\pm e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ここで $\eta_s = (a_s + b_s i)/(a_s - b_s i)$ で指数 e_{sj} の符号は対応する $a_s \pm b_s i$ の符号と一致する

有理整数から Gauss 整数へ

- $n > r$ とする
- $p_1, p_2, \ldots, p_r$ を 4 を法として 1 と合同な素数とし
  $p_s = a_s^2 + b_s^2 (a_s, b_s > 0)$ と 2 つの平方数の和で表す
- $x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{e_{1j}} p_2^{e_{2j}} \cdots p_r^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする

このとき

$$x_j + i = (1 \pm i)^{\delta_j} (a_1 \pm b_1 i)^{e_{1j}} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

より

$$\frac{x_j + i}{x_j - i} = i^{\pm\delta_j} \eta_1^{\pm e_{1j}} \eta_2^{\pm e_{2j}} \cdots \eta_r^{\pm e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ここで $\eta_s = (a_s + b_s i)/(a_s - b_s i)$ で指数 e_{sj} の符号は対応する $a_s \pm b_s i$ の符号と一致する

- $n > r$ とする
- $p_1, p_2, \ldots, p_r$ を 4 を法として 1 と合同な素数とし
  $p_s = a_s^2 + b_s^2 (a_s, b_s > 0)$ と 2 つの平方数の和で表す
- $x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{e_{1j}} p_2^{e_{2j}} \cdots p_r^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする

このとき

$$x_j + i = (1 \pm i)^{\delta_j} (a_1 \pm b_1 i)^{e_{1j}} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

より

$$\frac{x_j + i}{x_j - i} = i^{\pm\delta_j} \eta_1^{\pm e_{1j}} \eta_2^{\pm e_{2j}} \cdots \eta_r^{\pm e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ここで $\eta_s = (a_s + b_s i)/(a_s - b_s i)$ で指数 e_{sj} の符号は対応する $a_s \pm b_s i$ の符号と一致する

有理整数から Gauss 整数へ

- $n > r$ とする
- $p_1, p_2, \ldots, p_r$ を 4 を法として 1 と合同な素数とし
  $p_s = a_s^2 + b_s^2 (a_s, b_s > 0)$ と 2 つの平方数の和で表す
- $x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{e_{1j}} p_2^{e_{2j}} \cdots p_r^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする

このとき

$$x_j + i = (1 \pm i)^{\delta_j} (a_1 \pm b_1 i)^{e_{1j}} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

より

$$\frac{x_j + i}{x_j - i} = i^{\pm\delta_j} \eta_1^{\pm e_{1j}} \eta_2^{\pm e_{2j}} \cdots \eta_r^{\pm e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ここで $\eta_s = (a_s + b_s i)/(a_s - b_s i)$ で指数 e_{sj} の符号は対応する $a_s \pm b_s i$ の符号と一致する

有理整数から Gauss 整数へ

- $n > r$ とする
- $p_1, p_2, \ldots, p_r$ を 4 を法として 1 と合同な素数とし
  $p_s = a_s^2 + b_s^2 (a_s, b_s > 0)$ と 2 つの平方数の和で表す
- $x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{e_{1j}} p_2^{e_{2j}} \cdots p_r^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする

このとき

$$x_j + i = (1 \pm i)^{\delta_j} (a_1 \pm b_1 i)^{e_{1j}} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

より

$$\frac{x_j + i}{x_j - i} = i^{\pm\delta_j} \eta_1^{\pm e_{1j}} \eta_2^{\pm e_{2j}} \cdots \eta_r^{\pm e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ここで $\eta_s = (a_s + b_s i)/(a_s - b_s i)$ で指数 e_{sj} の符号は対応する $a_s \pm b_s i$ の符号と一致する

- $n > r$ とする
- $p_1, p_2, \ldots, p_r$ を 4 を法として 1 と合同な素数とし
  $p_s = a_s^2 + b_s^2 (a_s, b_s > 0)$ と 2 つの平方数の和で表す
- $x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{e_{1j}} p_2^{e_{2j}} \cdots p_r^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$ とする

このとき

$$x_j + i = (1 \pm i)^{\delta_j} (a_1 \pm b_1 i)^{e_{1j}} \cdots (a_r \pm b_r i)^{e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

より

$$\frac{x_j + i}{x_j - i} = i^{\pm\delta_j} \eta_1^{\pm e_{1j}} \eta_2^{\pm e_{2j}} \cdots \eta_r^{\pm e_{rj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ここで $\eta_s = (a_s + b_s i)/(a_s - b_s i)$ で指数 e_{sj} の符号は対応する $a_s \pm b_s i$ の符号と一致する

ここで

$$\prod_j \left(\frac{x_j + i}{x_j - i} \right)^{f_j} = i^k \tag{2}$$

ならば偏角を取ると

$$\sum_j f_j \arctan \frac{2}{x_j} = \frac{k\pi}{2}$$

つまり

$$\sum_j f_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

が得られる！

ここで

$$\prod_j \left(\frac{x_j + i}{x_j - i}\right)^{f_j} = i^k \tag{2}$$

ならば偏角を取ると

$$\sum_j f_j \arctan \frac{2}{x_j} = \frac{k\pi}{2}$$

つまり

$$\sum_j f_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

が得られる！

ここで

$$\prod_j \left(\frac{x_j + i}{x_j - i}\right)^{f_j} = i^k \tag{2}$$

ならば偏角を取ると

$$\sum_j f_j \arctan \frac{2}{x_j} = \frac{k\pi}{2}$$

つまり

$$\sum_j f_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

が得られる！

(2) は

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{1n} \\ & & \vdots & \\ e_{r1} & e_{r2} & \cdots & e_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値

だが、 $n > r$ だから、このような整数 $f_j (1 \leq j \leq n)$ がとれる！

連立方程式に帰着

(2) は

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{1n} \\ & & \vdots & \\ e_{r1} & e_{r2} & \cdots & e_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値

だが、 $n > r$ だから、このような整数 $f_j (1 \leq j \leq n)$ がとれる！

（@mat_der_D 2018 改）

$0.69313 < \log 2 < 0.69316$ を証明せよ。

解（素因数分解）

$$\frac{126}{125} = 2^1 \times 3^2 \times 5^{-3} \times 7^1,$$
$$\frac{225}{224} = 2^{-5} \times 3^2 \times 5^2 \times 7^{-1},$$
$$\frac{2401}{2400} = 2^{-5} \times 3^{-1} \times 5^{-2} \times 7^4,$$
$$\frac{4375}{4374} = 2^{-1} \times 3^{-7} \times 5^4 \times 7^1$$

より

解（対数の一次形式）

$$72\log\frac{126}{125}+27\log\frac{225}{224}-19\log\frac{2401}{2400}+31\log\frac{4375}{4374}=\log 2.$$

詳しい計算は今週土曜日、関西日曜数学友の会で！

解（対数の一次形式）

$$72\log\frac{126}{125}+27\log\frac{225}{224}-19\log\frac{2401}{2400}+31\log\frac{4375}{4374}=\log 2.$$

詳しい計算は今週土曜日、関西日曜数学友の会で！

π の場合との類似

$$\frac{x_j+1}{x_j} = m_1^{e_{1j}} m_2^{e_{2j}} \cdots m_r^{e_{nj}} (j=1,2,\ldots,n)$$

で、

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ & & \vdots & \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

が正則ならば

π の場合との類似

$$\frac{x_j+1}{x_j} = m_1^{e_{1j}} m_2^{e_{2j}} \cdots m_r^{e_{nj}} (j = 1, 2, \ldots, n)$$

で、

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ & & \vdots & \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

が正則ならば

連立方程式に帰着

$$
\begin{pmatrix}
e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\
e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\
 & & \vdots & \\
e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{pmatrix}
$$

となる f_j がとれて

$$
\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j + 1}{x_j} \right)^{f_j} = m_1
$$

となる

$$
\begin{pmatrix}
e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\
e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\
 & & \vdots & \\
e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となる f_j がとれて

$$
\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j + 1}{x_j} \right)^{f_j} = m_1
$$

となる

連立方程式から対数の一次形式へ

よって

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \log \frac{x_j + 1}{x_j} = \log m_1$$

となる

$x^2 - 1$ の形に帰着

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ が素数で

$$\frac{y+1}{y} = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$$

ならば

$$y(y+1) = p_1^{|e_1|} p_2^{|e_2|} \cdots p_n^{|e_n|}$$

となり $x = 2y + 1$ とおくと

$$x^2 - 1 = 4y(y+1) = 4p_1^{|e_1|} p_2^{|e_2|} \cdots p_r^{|e_n|}$$

となる

$x^2 - 1$ の形に帰着

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ が素数で

$$\frac{y+1}{y} = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$$

ならば

$$y(y+1) = p_1^{|e_1|} p_2^{|e_2|} \cdots p_n^{|e_n|}$$

となり $x = 2y + 1$ とおくと

$$x^2 - 1 = 4y(y+1) = 4p_1^{|e_1|} p_2^{|e_2|} \cdots p_r^{|e_n|}$$

となる

$x^2 - 1$ の形に帰着

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ が素数で

$$\frac{y+1}{y} = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$$

ならば

$$y(y+1) = p_1^{|e_1|} p_2^{|e_2|} \cdots p_n^{|e_n|}$$

となり $x = 2y + 1$ とおくと

$$x^2 - 1 = 4y(y+1) = 4p_1^{|e_1|} p_2^{|e_2|} \cdots p_r^{|e_n|}$$

となる

指数型不定方程式

かくして
$$x^2 \pm 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$$
の形の不定方程式を考察することになる！

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1, x, y > 0 \tag{3}$$

の解のうち $x + y\sqrt{D}$ が最小の解を (V, U) として ϵ を（この方程式について考察する間は）

$$\epsilon = V^2 - DU^2 = \pm 1$$

により定める

Pell 方程式

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1, x, y > 0 \tag{3}$$

の解のうち $x + y\sqrt{D}$ が最小の解を (V, U) として ϵ を（この方程式について考察する間は）

$$\epsilon = V^2 - DU^2 = \pm 1$$

により定める

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1, x, y > 0 \tag{3}$$

の解のうち $x + y\sqrt{D}$ が最小の解を (V, U) として ϵ を（この方程式について考察する間は）

$$\epsilon = V^2 - DU^2 = \pm 1$$

により定める

Pell 方程式の解を与える Lucas 数列

整数 U_n, V_n を

$$(V + U\sqrt{D})^n = V_n + U_n\sqrt{D}$$

で定めると

$$(V - U\sqrt{D})^n = V_n - U_n\sqrt{D}$$

より

$$V_n^2 - DU_n^2 = (V^2 - DU^2)^n = \epsilon^n = \pm 1$$

となって $(x, y) = (V_n, U_n)$ は (3) の解を与えている

整数 U_n, V_n を

$$(V + U\sqrt{D})^n = V_n + U_n\sqrt{D}$$

で定めると

$$(V - U\sqrt{D})^n = V_n - U_n\sqrt{D}$$

より

$$V_n^2 - DU_n^2 = (V^2 - DU^2)^n = \epsilon^n = \pm 1$$

となって $(x, y) = (V_n, U_n)$ は (3) の解を与えている

整数 U_n, V_n を

$$(V + U\sqrt{D})^n = V_n + U_n\sqrt{D}$$

で定めると

$$(V - U\sqrt{D})^n = V_n - U_n\sqrt{D}$$

より

$$V_n^2 - DU_n^2 = (V^2 - DU^2)^n = \epsilon^n = \pm 1$$

となって $(x, y) = (V_n, U_n)$ は (3) の解を与えている

Pell 方程式の一般解

逆に x, y が正の整数で $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ ならば $(x, y) = (V_n, U_n)$
つまり

定理

$x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の正の整数解は $(x, y) = (V_n, U_n)(n = 1, 2, \ldots)$ で与えられる

Pell 方程式の一般解

逆に x, y が正の整数で $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ ならば $(x, y) = (V_n, U_n)$
つまり

定理

$x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の正の整数解は $(x, y) = (V_n, U_n)(n = 1, 2, \ldots)$ で与えられる

証明

$$V_n + U_n\sqrt{D} < x + y\sqrt{D} < V_{n+1} + U_{n+1}\sqrt{D}$$

となったと仮定して

$$a + b\sqrt{D} = (x + y\sqrt{D})\left|V_n - U_n\sqrt{D}\right| = \frac{x + y\sqrt{D}}{V_n + U_n\sqrt{D}}$$

とおく

証明

$$V_n + U_n\sqrt{D} < x + y\sqrt{D} < V_{n+1} + U_{n+1}\sqrt{D}$$

となったと仮定して

$$a + b\sqrt{D} = (x + y\sqrt{D})\left|V_n - U_n\sqrt{D}\right| = \frac{x + y\sqrt{D}}{V_n + U_n\sqrt{D}}$$

とおく

証明

$$
\begin{aligned}
a^2 - Db^2 =& (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D})(V_n + U_n\sqrt{D})(V_n - U_n\sqrt{D}) \\
=& (x^2 - Dy^2)(V_n^2 - DU_n^2) \\
=& \pm 1
\end{aligned}
$$

かつ

$$
1 < a + b\sqrt{D} = \frac{x + y\sqrt{D}}{V_n + U_n\sqrt{D}} < V + U\sqrt{D}
$$

証明

$$
\begin{aligned}
a^2 - Db^2 =& (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D})(V_n + U_n\sqrt{D})(V_n - U_n\sqrt{D}) \\
=& (x^2 - Dy^2)(V_n^2 - DU_n^2) \\
=& \pm 1
\end{aligned}
$$

かつ

$$
1 < a + b\sqrt{D} = \frac{x + y\sqrt{D}}{V_n + U_n\sqrt{D}} < V + U\sqrt{D}
$$

証明

- $V + U\sqrt{D}$ は $x^2 - Dy^2 = 1, x, y > 0$ となる $x + y\sqrt{D}$ の中で最小のものなので $a, b > 0$ はありえない
- $a, b < 0$ ならば $a + b\sqrt{D} < 0$ なので、これもありえない
- $a > 0 > b$ のとき
  $a^2 - Db^2 = (a - b\sqrt{D})(a + b\sqrt{D}) > (a + b\sqrt{D})^2 > 1$
- $b > 0 > a$ のとき
  $Db^2 - a^2 = (-a + b\sqrt{D})(a + b\sqrt{D}) > (a + b\sqrt{D})^2 > 1$
- 上 2 つはいずれも $\left|a^2 - Db^2\right| = 1$ に矛盾

証明

- $V+U\sqrt{D}$ は $x^2-Dy^2=1, x, y>0$ となる $x+y\sqrt{D}$ の中で最小のものなので $a, b>0$ はありえない
- $a, b<0$ ならば $a+b\sqrt{D}<0$ なので、これもありえない
- $a>0>b$ のとき
  $a^2-Db^2=(a-b\sqrt{D})(a+b\sqrt{D})>(a+b\sqrt{D})^2>1$
- $b>0>a$ のとき
  $Db^2-a^2=(-a+b\sqrt{D})(a+b\sqrt{D})>(a+b\sqrt{D})^2>1$
- 上 2 つはいずれも $\left|a^2-Db^2\right|=1$ に矛盾

証明

- $V + U\sqrt{D}$ は $x^2 - Dy^2 = 1, x, y > 0$ となる $x + y\sqrt{D}$ の中で最小のものなので $a, b > 0$ はありえない
- $a, b < 0$ ならば $a + b\sqrt{D} < 0$ なので、これもありえない
- $a > 0 > b$ のとき
  $a^2 - Db^2 = (a - b\sqrt{D})(a + b\sqrt{D}) > (a + b\sqrt{D})^2 > 1$
- $b > 0 > a$ のとき
  $Db^2 - a^2 = (-a + b\sqrt{D})(a + b\sqrt{D}) > (a + b\sqrt{D})^2 > 1$
- 上 2 つはいずれも $\left|a^2 - Db^2\right| = 1$ に矛盾

証明

- $V + U\sqrt{D}$ は $x^2 - Dy^2 = 1, x, y > 0$ となる $x + y\sqrt{D}$ の中で最小のものなので $a, b > 0$ はありえない
- $a, b < 0$ ならば $a + b\sqrt{D} < 0$ なので、これもありえない
- $a > 0 > b$ のとき
  $a^2 - Db^2 = (a - b\sqrt{D})(a + b\sqrt{D}) > (a + b\sqrt{D})^2 > 1$
- $b > 0 > a$ のとき
  $Db^2 - a^2 = (-a + b\sqrt{D})(a + b\sqrt{D}) > (a + b\sqrt{D})^2 > 1$
- 上 2 つはいずれも $\left|a^2 - Db^2\right| = 1$ に矛盾

証明

- $V+U\sqrt{D}$ は $x^2-Dy^2=1, x, y>0$ となる $x+y\sqrt{D}$ の中で最小のものなので $a, b>0$ はありえない
- $a, b<0$ ならば $a+b\sqrt{D}<0$ なので、これもありえない
- $a>0>b$ のとき
  $a^2-Db^2=(a-b\sqrt{D})(a+b\sqrt{D})>(a+b\sqrt{D})^2>1$
- $b>0>a$ のとき
  $Db^2-a^2=(-a+b\sqrt{D})(a+b\sqrt{D})>(a+b\sqrt{D})^2>1$
- 上 2 つはいずれも $\left|a^2-Db^2\right|=1$ に矛盾

Lucas 数列の整除性

$$(x + y\sqrt{D})^2 = x^2 + Dy^2 + 2xy\sqrt{D}$$

より

$$U_{2m} = 2U_m V_m$$

また

$$(V_m + U_m\sqrt{D})^k = V_{km} + U_{km}\sqrt{D}$$

より

$$U_{km} = kV_m^{k-1}U_m + \binom{k}{3}V_m^{k-3}U_m^3 + \cdots$$

だから U_{km} は U_m で割り切れる

Lucas 数列の整除性

$$(x + y\sqrt{D})^2 = x^2 + Dy^2 + 2xy\sqrt{D}$$

より

$$U_{2m} = 2U_m V_m$$

また

$$(V_m + U_m\sqrt{D})^k = V_{km} + U_{km}\sqrt{D}$$

より

$$U_{km} = kV_m^{k-1}U_m + \binom{k}{3}V_m^{k-3}U_m^3 + \cdots$$

だから U_{km} は U_m で割り切れる

Lucas 数列の整除性

$$(x + y\sqrt{D})^2 = x^2 + Dy^2 + 2xy\sqrt{D}$$

より

$$U_{2m} = 2U_m V_m$$

また

$$(V_m + U_m\sqrt{D})^k = V_{km} + U_{km}\sqrt{D}$$

より

$$U_{km} = kV_m^{k-1}U_m + \binom{k}{3}V_m^{k-3}U_m^3 + \cdots$$

だから U_{km} は U_m で割り切れる

$$(x+y\sqrt{D})^2 = x^2 + Dy^2 + 2xy\sqrt{D}$$

より

$$U_{2m} = 2U_mV_m$$

また

$$(V_m + U_m\sqrt{D})^k = V_{km} + U_{km}\sqrt{D}$$

より

$$U_{km} = kV_m^{k-1}U_m + \binom{k}{3}V_m^{k-3}U_m^3 + \cdots$$

だから U_{km} は U_m で割り切れる

Lucas 数列の整除性

$$(x + y\sqrt{D})^2 = x^2 + Dy^2 + 2xy\sqrt{D}$$

より

$$U_{2m} = 2U_m V_m$$

また

$$(V_m + U_m\sqrt{D})^k = V_{km} + U_{km}\sqrt{D}$$

より

$$U_{km} = kV_m^{k-1}U_m + \binom{k}{3}V_m^{k-3}U_m^3 + \cdots$$

だから U_{km} は U_m で割り切れる

Størmer の定理

定理 (Størmer, 1897)

$n > 1$ かつ $(n, D) \neq (2, 2)$ のとき U_n の素因数で D を割り切らないものが存在する

証明（n が偶数）

$n = 2m$ のとき $U_n = 2U_mV_m$ だが $(m, D) = (1, 1)$ のときを除いて（← 10/29 追記）$V_m > 1$ かつ $\gcd(V_m, D) = 1$ だから V_m の素因数は D の素因数ではない

そこで、以下 $n = 2m + 1$ を奇数とする

証明（n が偶数）

$n = 2m$ のとき $U_n = 2U_mV_m$ だが $(m, D) = (1, 1)$ のときを除いて（← 10/29 追記）$V_m > 1$ かつ $\gcd(V_m, D) = 1$ だから V_m の素因数は D の素因数ではない

そこで、以下 $n = 2m + 1$ を奇数とする

証明（n が偶数）

$n = 2m$ のとき $U_n = 2U_mV_m$ だが $(m, D) = (1, 1)$ のときを除いて（$\leftarrow$ 10/29 追記）$V_m > 1$ かつ $\gcd(V_m, D) = 1$ だから V_m の素因数は D の素因数ではない

そこで、以下 $n = 2m + 1$ を奇数とする

証明（U_n の表示）

$$
\begin{aligned}
V_n + U_n\sqrt{D} =& \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} V^{n-r} U^r D^{r/2} \\
=& V^n + \binom{n}{2} V^{n-2} U^2 D + \binom{n}{4} V^{n-4} U^4 D^2 + \cdots \\
& + \binom{n}{1} V^{n-1} U\sqrt{D} + \binom{n}{3} V^{n-3} U^3 D\sqrt{D} + \cdots
\end{aligned}
$$

より

$$
U_n = U\left(nV^{n-1} + \binom{n}{3} V^{n-3} U^2 D + \cdots\right)
$$

とあらわされる

証明（U_n の表示）

$$
\begin{aligned}
V_n + U_n\sqrt{D} =& \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} V^{n-r} U^r D^{r/2} \\
=& V^n + \binom{n}{2} V^{n-2} U^2 D + \binom{n}{4} V^{n-4} U^4 D^2 + \cdots \\
&+ \binom{n}{1} V^{n-1} U \sqrt{D} + \binom{n}{3} V^{n-3} U^3 D \sqrt{D} + \cdots
\end{aligned}
$$

より

$$
U_n = U \left(nV^{n-1} + \binom{n}{3} V^{n-3} U^2 D + \cdots \right)
$$

とあらわされる

証明（二項係数を割り切る素数の指数）

$$p^s \mid\mid D, p^t \mid\mid n$$

とする

$$\binom{n}{2k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-2k)}{(2k+1)!}$$

で $(2k+1)!$ を割り切る p の指数は

$$\left\lfloor \frac{2k+1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k+1}{p^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{2k+1}{p} + \frac{2k+1}{p^2} + \cdots = \frac{2k+1}{p-1}$$

証明（二項係数を割り切る素数の指数）

$$p^s \mid\mid D, p^t \mid\mid n$$

とする

$$\binom{n}{2k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-2k)}{(2k+1)!}$$

で $(2k+1)!$ を割り切る p の指数は

$$\left\lfloor \frac{2k+1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k+1}{p^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{2k+1}{p} + \frac{2k+1}{p^2} + \cdots = \frac{2k+1}{p-1}$$

$$p^s \mid\mid D, p^t \mid\mid n$$

とする

$$\binom{n}{2k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-2k)}{(2k+1)!}$$

で $(2k+1)!$ を割り切る p の指数は

$$\left\lfloor \frac{2k+1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k+1}{p^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{2k+1}{p} + \frac{2k+1}{p^2} + \cdots = \frac{2k+1}{p-1}$$

証明（二項係数を割り切る素数の指数）

$$p^s \mid\mid D, p^t \mid\mid n$$

とする

$$\binom{n}{2k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-2k)}{(2k+1)!}$$

で $(2k+1)!$ を割り切る p の指数は

$$\left\lfloor \frac{2k+1}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k+1}{p^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{2k+1}{p} + \frac{2k+1}{p^2} + \cdots = \frac{2k+1}{p-1}$$

証明（U_n を構成する各項の整除性）

だから $\binom{n}{2k+1} D^k$ を割り切る p の指数 $> sk + t - \frac{2k+1}{p-1}$
よって $p = 3, s \geq 2$ または $p \geq 5$ のとき

$$sk - \frac{2k+1}{p-1} = \left(s - \frac{2}{p-1}\right) k - \frac{1}{p-1} \geq \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \geq 0$$

だから $\binom{n}{2k+1} D^k$ を割り切る p の指数 $> t$
また p が n を割り切らないとき $\binom{n}{2k+1} D^k$ を割り切る p の指数
$\geq sk > 0 = t$

だから $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数 $> sk + t - \frac{2k+1}{p-1}$
よって $p = 3, s \geq 2$ または $p \geq 5$ のとき

$$sk - \frac{2k+1}{p-1} = \left(s - \frac{2}{p-1}\right)k - \frac{1}{p-1} \geq \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \geq 0$$

だから $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数 $> t$
また p が n を割り切らないとき $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数
$\geq sk > 0 = t$

証明（U_n を構成する各項の整除性）

だから $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数 $> sk + t - \frac{2k+1}{p-1}$
よって $p = 3, s \geq 2$ または $p \geq 5$ のとき

$$sk - \frac{2k+1}{p-1} = \left(s - \frac{2}{p-1}\right)k - \frac{1}{p-1} \geq \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \geq 0$$

だから $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数 $> t$
また p が n を割り切らないとき $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数
$\geq sk > 0 = t$

証明（U_n を構成する各項の整除性）

だから $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数 $> sk + t - \frac{2k+1}{p-1}$
よって $p = 3, s \geq 2$ または $p \geq 5$ のとき

$$sk - \frac{2k+1}{p-1} = \left(s - \frac{2}{p-1}\right)k - \frac{1}{p-1} \geq \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \geq 0$$

だから $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数 $> t$
また p が n を割り切らないとき $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p の指数
$\geq sk > 0 = t$

証明（D の素因数）

D の素因数 p_i に対して

$$p_i^{s_i} \mid\mid D, p_i^{t_i} \mid\mid n$$

として

$$L = \prod p_i^{t_i}$$

とおく（以下 10/29 追記）と n/L はどの p_i でも割り切れないから
$\gcd(n/L, D) = 1$

証明（D の素因数）

D の素因数 p_i に対して

$$p_i^{s_i} \mid\mid D, p_i^{t_i} \mid\mid n$$

として

$$L = \prod p_i^{t_i}$$

とおく（以下 10/29 追記）と n/L はどの p_i でも割り切れないから
$\gcd(n/L, D) = 1$

証明（第一の場合）

まず $\gcd(D,3)=1, 3^2 \mid D$ または $p_i = 3$ に対して $t_i = 0$ とする

- このとき、すべての D の素因数 p_i について $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p_i の指数 $> t_i$
- n は奇数だから $p_i = 2$ に対しては必ず $t_i = 0$

証明（第一の場合）

まず $\gcd(D, 3) = 1, 3^2 \mid D$ または $p_i = 3$ に対して $t_i = 0$ とする

- このとき、すべての D の素因数 p_i について $\binom{n}{2k+1}D^k$ を割り切る p_i の指数 $> t_i$
- n は奇数だから $p_i = 2$ に対しては必ず $t_i = 0$

証明（第一の場合）

まず $\gcd(D, 3) = 1, 3^2 \mid D$ または $p_i = 3$ に対して $t_i = 0$ とする

- このとき、すべての D の素因数 p_i について $\binom{n}{2k+1} D^k$ を割り切る p_i の指数 $> t_i$
- n は奇数だから $p_i = 2$ に対しては必ず $t_i = 0$

証明（U_n の因数）

$$M = \frac{U_n}{UL} = \frac{1}{L}\left(nV^{n-1} + \binom{n}{3}V^{n-3}U^2D + \cdots\right)$$

は 1 より大きい整数で　$M_1 = nV^{n-1}/L$ とおくと

$$M = M_1 + M_2\prod_i p_i > 1.$$

$\gcd(n/L, D) = 1$ かつ（← 10/29 追記）$\gcd(D, V) = 1$ だから
$\gcd(D, M_1) = 1$
よって $\gcd(D, M) = 1$

証明（U_n の因数）

$$M = \frac{U_n}{UL} = \frac{1}{L}\left(nV^{n-1} + \binom{n}{3}V^{n-3}U^2D + \cdots\right)$$

は 1 より大きい整数で　$M_1 = nV^{n-1}/L$ とおくと

$$M = M_1 + M_2\prod_i p_i > 1.$$

$\gcd(n/L, D) = 1$ かつ（$\leftarrow$ 10/29 追記） $\gcd(D, V) = 1$ だから
$\gcd(D, M_1) = 1$
よって $\gcd(D, M) = 1$

証明（U_n の因数）

$$M = \frac{U_n}{UL} = \frac{1}{L}\left(nV^{n-1} + \binom{n}{3}V^{n-3}U^2D + \cdots\right)$$

は 1 より大きい整数で　$M_1 = nV^{n-1}/L$ とおくと

$$M = M_1 + M_2 \prod_i p_i > 1.$$

$\gcd(n/L, D) = 1$ かつ（$\leftarrow$ 10/29 追記）$\gcd(D, V) = 1$ だから
$\gcd(D, M_1) = 1$
よって $\gcd(D, M) = 1$

証明（U_n の因数）

$$M = \frac{U_n}{UL} = \frac{1}{L}\left(nV^{n-1} + \binom{n}{3}V^{n-3}U^2D + \cdots\right)$$

は 1 より大きい整数で　$M_1 = nV^{n-1}/L$ とおくと

$$M = M_1 + M_2\prod_i p_i > 1.$$

$\gcd(n/L, D) = 1$ かつ（$\leftarrow$ 10/29 追記）$\gcd(D, V) = 1$ だから
$\gcd(D, M_1) = 1$
よって $\gcd(D, M) = 1$

証明（第一の場合・完）

よって M は D の素因数以外の素因数を持ち $U_n = ULM$ も D の素因数以外の素因数を持つ

証明（第二の場合）

$3 \mid\mid D, 3 \mid n$ で U_n の素因数が D の素因数以外にないとする

- U_3 は 3 で割り切れるので U_n も 3 で割り切れる
- $(z, w) = (V_n, U_n/3)$ は $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解
- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の最小の解を (Z, W) とおく
- $9D$ については先程示した事実から $U_n/3 = W$ でなければならない

証明（第二の場合）

$3 \mid\mid D, 3 \mid n$ で U_n の素因数が D の素因数以外にないとする

- U_3 は 3 で割り切れるので U_n も 3 で割り切れる
- $(z, w) = (V_n, U_n/3)$ は $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解
- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の最小の解を (Z, W) とおく
- $9D$ については先程示した事実から $U_n/3 = W$ でなければならない

証明（第二の場合）

$3 \mid\mid D, 3 \mid n$ で U_n の素因数が D の素因数以外にないとする

- U_3 は 3 で割り切れるので U_n も 3 で割り切れる
- $(z, w) = (V_n, U_n/3)$ は $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解
- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の最小の解を (Z, W) とおく
- $9D$ については先程示した事実から $U_n/3 = W$ でなければならない

証明（第二の場合）

$3 \mid\mid D, 3 \mid n$ で U_n の素因数が D の素因数以外にないとする

- U_3 は 3 で割り切れるので U_n も 3 で割り切れる
- $(z, w) = (V_n, U_n/3)$ は $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解
- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の最小の解を (Z, W) とおく
- $9D$ については先程示した事実から $U_n/3 = W$ でなければならない

証明（第二の場合）

$3 \parallel D, 3 \mid n$ で U_n の素因数が D の素因数以外にないとする

- U_3 は 3 で割り切れるので U_n も 3 で割り切れる
- $(z, w) = (V_n, U_n/3)$ は $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解
- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の最小の解を (Z, W) とおく
- $9D$ については先程示した事実から $U_n/3 = W$ でなければならない

証明（第一の場合に還元）

- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解は $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解のうち y が 3 の倍数であるものに一対一に対応する
- U_n は U_m が 3 の倍数となる最初のもの
- $(V + U\sqrt{D})^3 = V^3 + 3VU^2D + (3V^2U + U^3D)\sqrt{D}$ より

$$U_3 = U(3V^2 + U^2D)$$

- $D = 3D_1$ とおくと

$$U_3 = 3(V^2 + U^2D_1)$$

は 3 の倍数
- よって $n = 1$ または 3

証明（第一の場合に還元）

- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解は $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解のうち y が 3 の倍数であるものに一対一に対応する
- U_n は U_m が 3 の倍数となる最初のもの
- $(V + U\sqrt{D})^3 = V^3 + 3VU^2D + (3V^2U + U^3D)\sqrt{D}$ より

$$U_3 = U(3V^2 + U^2D)$$

- $D = 3D_1$ とおくと

$$U_3 = 3(V^2 + U^2D_1)$$

  は 3 の倍数
- よって $n = 1$ または 3

証明（第一の場合に還元）

- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解は $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解のうち y が 3 の倍数であるものに一対一に対応する
- U_n は U_m が 3 の倍数となる最初のもの
- $(V + U\sqrt{D})^3 = V^3 + 3VU^2D + (3V^2U + U^3D)\sqrt{D}$ より

$$U_3 = U(3V^2 + U^2D)$$

- $D = 3D_1$ とおくと

$$U_3 = 3(V^2 + U^2D_1)$$

  は 3 の倍数
- よって $n = 1$ または 3

証明（第一の場合に還元）

- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解は $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解のうち y が 3 の倍数であるものに一対一に対応する
- U_n は U_m が 3 の倍数となる最初のもの
- $(V + U\sqrt{D})^3 = V^3 + 3VU^2D + (3V^2U + U^3D)\sqrt{D}$ より

$$U_3 = U(3V^2 + U^2D)$$

- $D = 3D_1$ とおくと

$$U_3 = 3(V^2 + U^2D_1)$$

  は 3 の倍数
- よって $n = 1$ または 3

証明（第一の場合に還元）

- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解は $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解のうち y が 3 の倍数であるものに一対一に対応する
- U_n は U_m が 3 の倍数となる最初のもの
- $(V + U\sqrt{D})^3 = V^3 + 3VU^2D + (3V^2U + U^3D)\sqrt{D}$ より
$$U_3 = U(3V^2 + U^2D)$$
- $D = 3D_1$ とおくと
$$U_3 = 3(V^2 + U^2D_1)$$
は 3 の倍数
- よって $n = 1$ または 3

証明（第一の場合に還元）

- $z^2 - 9Dw^2 = \pm 1$ の解は $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解のうち y が 3 の倍数であるものに一対一に対応する
- U_n は U_m が 3 の倍数となる最初のもの
- $(V + U\sqrt{D})^3 = V^3 + 3VU^2D + (3V^2U + U^3D)\sqrt{D}$ より

$$U_3 = U(3V^2 + U^2D)$$

- $D = 3D_1$ とおくと

$$U_3 = 3(V^2 + U^2D_1)$$

  は 3 の倍数
- よって $n = 1$ または 3

証明（$n = 3$ の場合）

- $n = 3$ のとき $U_3/3 = V^2 + U^2 D_1$
- よって $V^2 + U^2 D_1$ が D の素因数以外の素因数をもたない
- p を $V^2 + U^2 D_1$ の素因数とすると p が D の素因数でもある
- $\gcd(V, D) = 1$ だから p は D_1 を割り切らない、よって $p = 3$ しかありえない

証明（$n = 3$ の場合）

- $n = 3$ のとき $U_3/3 = V^2 + U^2 D_1$
- よって $V^2 + U^2 D_1$ が D の素因数以外の素因数をもたない
- p を $V^2 + U^2 D_1$ の素因数とすると p が D の素因数でもある
- $\gcd(V, D) = 1$ だから p は D_1 を割り切らない、よって $p = 3$ しかありえない

証明（$n = 3$ の場合）

- $n = 3$ のとき $U_3/3 = V^2 + U^2 D_1$
- よって $V^2 + U^2 D_1$ が D の素因数以外の素因数をもたない
- p を $V^2 + U^2 D_1$ の素因数とすると p が D の素因数でもある
- $\gcd(V, D) = 1$ だから p は D_1 を割り切らない、よって $p = 3$ しかありえない

証明（$n = 3$ の場合）

- $n = 3$ のとき $U_3/3 = V^2 + U^2 D_1$
- よって $V^2 + U^2 D_1$ が D の素因数以外の素因数をもたない
- p を $V^2 + U^2 D_1$ の素因数とすると p が D の素因数でもある
- $\gcd(V, D) = 1$ だから p は D_1 を割り切らない、よって $p = 3$ しかありえない

証明（第二の場合・完）

よって

$$V^2 + U^2 D_1 = 3^k$$

しかし $V^2 - 3D_1U^2 = V^2 - DU^2 = 1$ なので

$$4V^2 = 3^{g+1} + 1,$$

つまり

$$(2V + 1)(2V - 1) = 3^{g+1}$$

より $V = 1, g = 0, DU^2 = 0$ となって矛盾

証明（第二の場合・完）

よって

$$V^2 + U^2 D_1 = 3^k$$

しかし $V^2 - 3D_1U^2 = V^2 - DU^2 = 1$ なので

$$4V^2 = 3^{g+1} + 1,$$

つまり

$$(2V+1)(2V-1) = 3^{g+1}$$

より $V = 1, g = 0, DU^2 = 0$ となって矛盾

証明（第二の場合・完）

よって

$$V^2 + U^2 D_1 = 3^k$$

しかし $V^2 - 3D_1U^2 = V^2 - DU^2 = 1$ なので

$$4V^2 = 3^{g+1} + 1,$$

つまり

$$(2V+1)(2V-1) = 3^{g+1}$$

より $V = 1, g = 0, DU^2 = 0$ となって矛盾

証明（第二の場合・完）

よって

$$V^2 + U^2 D_1 = 3^k$$

しかし $V^2 - 3D_1U^2 = V^2 - DU^2 = 1$ なので

$$4V^2 = 3^{g+1} + 1,$$

つまり

$$(2V+1)(2V-1) = 3^{g+1}$$

より $V = 1, g = 0, DU^2 = 0$ となって矛盾

証明（第二の場合・完）

よって

$$V^2 + U^2 D_1 = 3^k$$

しかし $V^2 - 3D_1U^2 = V^2 - DU^2 = 1$ なので

$$4V^2 = 3^{g+1} + 1,$$

つまり

$$(2V+1)(2V-1) = 3^{g+1}$$

より $V = 1, g = 0, DU^2 = 0$ となって矛盾

指数型不定方程式を解く

これを使って

$$x^2 \pm 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_s^{e_s}$$

の形の方程式の解をすべて求めることができる

Pell 方程式に帰着

まず各 e_i は

$$e_i = g_i + 2h_i,$$

ただし

$$g_i = 0 (a_i = 0), g_i = 1 (a_i \equiv 1 \pmod 2), g_i = 2 (a_i > 0, a_i \equiv 0 \pmod 2)$$

の形に一意的にあらわせる

Pell 方程式に帰着

まず各 e_i は

$$e_i = g_i + 2h_i,$$

ただし

$$g_i = 0(a_i = 0), g_i = 1(a_i \equiv 1 \pmod 2), g_i = 2(a_i > 0, a_i \equiv 0 \pmod 2)$$

の形に一意的にあらわせる

Pell 方程式に帰着

まず各 e_i は

$$e_i = g_i + 2h_i,$$

ただし

$$g_i = 0(a_i = 0), g_i = 1(a_i \equiv 1 \pmod 2), g_i = 2(a_i > 0, a_i \equiv 0 \pmod 2)$$

の形に一意的にあらわせる

このようにあらわすと、

$$x^2+1 = p_1^{g_1+2h_1}p_2^{g_2+2h_2}\dots p_s^{g_s+2h_s} = \left(\prod_i p_i^{g_i}\right)\left(\prod_i p_i^{h_i}\right)^2$$

となり、さらに $h_i > 0$ のとき常に $g_i > 0$ となる（単純に $e_i = g_i + 2h_i$, $g_i = 0, 1$ とするとこれが成り立たなくなる）

このようにあらわすと、

$$x^2+1=p_1^{g_1+2h_1}p_2^{g_2+2h_2}\dots p_s^{g_s+2h_s}=\left(\prod_i p_i^{g_i}\right)\left(\prod_i p_i^{h_i}\right)^2$$

となり、さらに $h_i>0$ のとき常に $g_i>0$ となる（単純に $e_i=g_i+2h_i$, $g_i=0,1$ とするとこれが成り立たなくなる）

このようにあらわすと、

$$x^2+1=p_1^{g_1+2h_1}p_2^{g_2+2h_2}\dots p_s^{g_s+2h_s}=\left(\prod_i p_i^{g_i}\right)\left(\prod_i p_i^{h_i}\right)^2$$

となり、さらに $h_i>0$ のとき常に $g_i>0$ となる（単純に $e_i=g_i+2h_i$, $g_i=0,1$ とするとこれが成り立たなくなる）

Pell 方程式に帰着

ここで

$$D = \prod_i p_i^{g_i}, y = \prod_i p_i^{h_i}$$

とおくと

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

かつ y の素因数はすべて D をも割り切るので $y = U_1$ でなければならない

Pell 方程式に帰着

ここで

$$D = \prod_i p_i^{g_i}, y = \prod_i p_i^{h_i}$$

とおくと

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

かつ y の素因数はすべて D をも割り切るので $y = U_1$ でなければならない

D は $\prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数で、そのような数は有限個しかないので有限の手続きですべて求めることができる

実際 $D = \prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数は 3^s 個ある

D が平方数ならば $x^2 - D^2 = 1$ の解は $(x, y) = (1, 0)$ しかないので そのようなものを除くと $3^s - 2^s$ 個の D について方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の最小解を確かめればよい

よって解の個数は $3^s - 2^s$ 個以下

Størmer の定理を使う

D は $\prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数で、そのような数は有限個しかないので有限の手続きですべて求めることができる
実際 $D = \prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数は 3^s 個ある
D が平方数ならば $x^2 - D^2 = 1$ の解は $(x, y) = (1, 0)$ しかないので そのようなものを除くと $3^s - 2^s$ 個の D について方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の最小解を確かめればよい
よって解の個数は $3^s - 2^s$ 個以下

D は $\prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数で、そのような数は有限個しかないので有限の手続きですべて求めることができる
実際 $D = \prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数は 3^s 個ある
D が平方数ならば $x^2 - D^2 = 1$ の解は $(x, y) = (1, 0)$ しかないので そのようなものを除くと $3^s - 2^s$ 個の D について方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の最小解を確かめればよい
よって解の個数は $3^s - 2^s$ 個以下

Størmer の定理を使う

D は $\prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数で、そのような数は有限個しかないので有限の手続きですべて求めることができる
実際 $D = \prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数は 3^s 個ある
D が平方数ならば $x^2 - D^2 = 1$ の解は $(x, y) = (1, 0)$ しかないので そのようなものを除くと $3^s - 2^s$ 個の D について方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の最小解を確かめればよい
よって解の個数は $3^s - 2^s$ 個以下

D は $\prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数で、そのような数は有限個しかないので有限の手続きですべて求めることができる
実際 $D = \prod_i p_i^{g_i}, 0 \leq g_i \leq 2$ の形の数は 3^s 個ある
D が平方数ならば $x^2 - D^2 = 1$ の解は $(x, y) = (1, 0)$ しかないので そのようなものを除くと $3^s - 2^s$ 個の D について方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の最小解を確かめればよい
よって解の個数は $3^s - 2^s$ 個以下

Størmer の定理を使う

また、 p_i のひとつが 2 であるとき e_i は 0 または 1 しかとることができず、その場合確かめるべき方程式の個数は $2 \times 3^{s-1} - 2^{s-1}$ 個となり、解の個数もそれ以下となる

また、 p_i のひとつが 2 であるとき e_i は 0 または 1 しかとることができず、その場合確かめるべき方程式の個数は $2 \times 3^{s-1} - 2^{s-1}$ 個となり、解の個数もそれ以下となる

例

たとえば

$$X^2 + 1 = 2^{e_1} 5^{e_2} 13^{e_3}$$

を解くには

$$x^2 - 2^{g_1} 5^{g_2} 13^{g_3} y^2 = -1$$

の最小の非自明な解を確かめる

なお、$a_1 \leq 1$ だから $g_1 = 0, 1$
また g_1, g_2, g_3 の少なくとも 1 つは奇数

例

たとえば

$$X^2 + 1 = 2^{e_1} 5^{e_2} 13^{e_3}$$

を解くには

$$x^2 - 2^{g_1} 5^{g_2} 13^{g_3} y^2 = -1$$

の最小の非自明な解を確かめる

なお、$a_1 \leq 1$ だから $g_1 = 0, 1$
また g_1, g_2, g_3 の少なくとも 1 つは奇数

例

たとえば

$$X^2 + 1 = 2^{e_1} 5^{e_2} 13^{e_3}$$

を解くには

$$x^2 - 2^{g_1} 5^{g_2} 13^{g_3} y^2 = -1$$

の最小の非自明な解を確かめる

なお、$a_1 \leq 1$ だから $g_1 = 0, 1$
また g_1, g_2, g_3 の少なくとも 1 つは奇数

例

たとえば

$$X^2 + 1 = 2^{e_1} 5^{e_2} 13^{e_3}$$

を解くには

$$x^2 - 2^{g_1} 5^{g_2} 13^{g_3} y^2 = -1$$

の最小の非自明な解を確かめる

なお、$a_1 \leq 1$ だから $g_1 = 0, 1$
また g_1, g_2, g_3 の少なくとも 1 つは奇数

14 個の Pell 方程式に帰着 (1)

$$g_1 = 1, g_2 = 0, g_3 = 0 : x^2 - 2y^2 = -1, (x, y) = (1, 1)$$
$$g_1 = 0, g_2 = 1, g_3 = 0 : x^2 - 5y^2 = -1, (x, y) = (2, 1)$$
$$g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 0 : x^2 - 10y^2 = -1, (x, y) = (3, 1)$$
$$g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = 0 : x^2 - 50y^2 = -1, (x, y) = (7, 1)$$
$$g_1 = 0, g_2 = 0, g_3 = 1 : x^2 - 13y^2 = -1, (x, y) = (18, 5)$$
$$g_1 = 1, g_2 = 0, g_3 = 1 : x^2 - 26y^2 = -1, (x, y) = (5, 1)$$
$$g_1 = 0, g_2 = 1, g_3 = 1 : x^2 - 65y^2 = -1, (x, y) = (8, 1)$$

14 個の Pell 方程式に帰着 (2)

$g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 1 : x^2 - 130y^2 = -1, (x, y) = (57, 5)$

$g_1 = 0, g_2 = 2, g_3 = 1 : x^2 - 325y^2 = -1, (x, y) = (18, 1)$

$g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = 1 : x^2 - 650y^2 = -1,$ No solution

$g_1 = 1, g_2 = 0, g_3 = 2 : x^2 - 338y^2 = -1, (x, y) = (239, 13)$

$g_1 = 0, g_2 = 1, g_3 = 2 : x^2 - 845y^2 = -1, (x, y) = (12238, 421)$

$g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 2 : x^2 - 1690y^2 = -1,$ No solution

$g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = 2 : x^2 - 8450y^2 = -1, (x, y) = (54608393, 594061)$

すべての解を得る

ここから

$$
\begin{aligned}
1+1^2 &= 2, 1+2^2 = 5,\\
1+3^2 &= 2\times 5, 1+5^2 = 2\times 13,\\
1+7^2 &= 2\times 5^2, 1+8^2 = 5\times 13,\\
1+18^2 &= 5^2\times 13, 1+57^2 = 2\times 5^3\times 13,\\
1+239^2 &= 2\times 13^4
\end{aligned}
$$

の 9 個の解が得られる

類例

$$n(n+1) = 2^a 3^b 5^c 7^d$$

の解は

$$\begin{aligned} n =& 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\ & 14, 15, 20, 24, 27, 35, 48, 49, \\ & 63, 80, 125, 224, 2400, 4374 \end{aligned}$$

で与えられる

類例

$$n(n+1) = 2^a 3^b 5^c 7^d$$

の解は

$$\begin{aligned} n = &1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\ &14, 15, 20, 24, 27, 35, 48, 49, \\ &63, 80, 125, 224, 2400, 4374 \end{aligned}$$

で与えられる

註

特に $1+239^2=2\times 13^4$ は $1+x^2=2y^4$ の最大の解であるとともに $X^2+1=2^a5^b13^c$ の最大の解でもある

$x^2+1=2y^4, x, y>0$ の解が $(x,y)=(1,1),(239,13)$ しかないことを Ljunggren が 1942 年に証明しているが、その証明は非常に難しい Steiner and Tzanakis が 1991 年により簡単な証明を発表しているが、依然として初等的ではない

註

特に $1 + 239^2 = 2 \times 13^4$ は $1 + x^2 = 2y^4$ の最大の解であるとともに $X^2 + 1 = 2^a 5^b 13^c$ の最大の解でもある
$x^2 + 1 = 2y^4, x, y > 0$ の解が $(x, y) = (1, 1), (239, 13)$ しかないことを Ljunggren が 1942 年に証明しているが、その証明は非常に難しい Steiner and Tzanakis が 1991 年により簡単な証明を発表しているが、依然として初等的ではない

逆問題

逆に、Machin の公式のようなものをすべて見つけるにはどうすればよいか？たとえば

$$a \arctan \frac{1}{x} + b \arctan \frac{1}{y} = \frac{k\pi}{4} \tag{4}$$

のようなものを見つけるにはどうすればよいか？

逆問題

逆に、Machin の公式のようなものをすべて見つけるにはどうすればよいか？たとえば

$$a \arctan \frac{1}{x} + b \arctan \frac{1}{y} = \frac{k\pi}{4} \tag{4}$$

のようなものを見つけるにはどうすればよいか？

2 項の Machin 型等式

$$\begin{aligned} \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} &= \frac{\pi}{4}, \\ 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7} &= \frac{\pi}{4}, \\ 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} &= \frac{\pi}{4}, \\ 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

がある （それぞれ Euler, Hutton, Hermann が発見したとされていたが、いずれもそれ以前に Machin が発見していたらしい）

2 項の Machin 型等式

$$
\begin{aligned}
\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} &= \frac{\pi}{4},\\
2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7} &= \frac{\pi}{4},\\
2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} &= \frac{\pi}{4},\\
4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

がある （それぞれ Euler, Hutton, Hermann が発見したとされていたが、いずれもそれ以前に Machin が発見していたらしい）

Machin 型等式から素因数分解へ

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

ならば

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j + i}{x_j - i} \right)^{e_j} = \epsilon,$$

ここで ϵ は ± 1 または $\pm i$ なので（左辺の絶対値は 1 であることに注意）

$$\prod_{j=1}^{n} (x_j^2 + 1)^{e_j} = 2^{\delta}$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

ならば

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j + i}{x_j - i} \right)^{e_j} = \epsilon,$$

ここで ϵ は ± 1 または $\pm i$ なので（左辺の絶対値は 1 であることに注意）

$$\prod_{j=1}^{n} (x_j^2 + 1)^{e_j} = 2^{\delta}$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

ならば

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j + i}{x_j - i} \right)^{e_j} = \epsilon,$$

ここで ϵ は ± 1 または $\pm i$ なので（左辺の絶対値は 1 であることに注意）

$$\prod_{j=1}^{n} (x_j^2 + 1)^{e_j} = 2^{\delta}$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

ならば

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j + i}{x_j - i} \right)^{e_j} = \epsilon,$$

ここで ϵ は ± 1 または $\pm i$ なので（左辺の絶対値は 1 であることに注意）

$$\prod_{j=1}^{n} (x_j^2 + 1)^{e_j} = 2^{\delta}$$

不定方程式から多変数一次方程式へ

$$x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{g_{1j}} p_2^{g_{2j}} \cdots p_r^{g_{rj}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

とおくと

$$e_1 g_{i1} + e_2 g_{i2} + \cdots + e_n g_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

である

不定方程式から多変数一次方程式へ

$$x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} p_1^{g_{1j}} p_2^{g_{2j}} \cdots p_r^{g_{rj}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

とおくと

$$e_1 g_{i1} + e_2 g_{i2} + \cdots + e_n g_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

である

多変数一次方程式の整数解

より一般に

$$e_1 w_1 + e_2 w_2 + \cdots + e_m w_m = 0$$

を解く

2 変数の場合

$$e_1 w_1 + e_2 w_2 = 0$$

の解は

$$(w_1, w_2) = a(e_2/d, -e_1/d) =: a\mathbf{y}_1 (a \in \mathbf{Z}, d = \gcd(e_1, e_2))$$

で与えられる

2 変数の場合

$$e_1 w_1 + e_2 w_2 = 0$$

の解は

$$(w_1, w_2) = a(e_2/d, -e_1/d) =: a\mathbf{y}_1 (a \in \mathbf{Z}, d = \mathrm{gcd}(e_1, e_2))$$

で与えられる

$$e_1 y_{m-1,1} + e_2 y_{m-1,2} + \cdots + e_{m-1} y_{m-1,m-1} = -e_m y_{m-1,m}$$

となる最小の正の $y_{m-1,m}$ をとって、そのときの解を $\mathbf{y}_{m-1} = (y_{m-1,1}, y_{m-1,2}, \ldots, y_{m-1,m})$ とする

$$e_1 y_{m-1,1} + e_2 y_{m-1,2} + \cdots + e_{m-1} y_{m-1,m-1} = -e_m y_{m-1,m}$$

となる最小の正の $y_{m-1,m}$ をとって、そのときの解を
$\mathbf{y}_{m-1} = (y_{m-1,1}, y_{m-1,2}, \ldots, y_{m-1,m})$ とする

$$e_1 y_{m-1,1} + e_2 y_{m-1,2} + \cdots + e_{m-1} y_{m-1,m-1} = -e_m y_{m-1,m}$$

となる最小の正の $y_{m-1,m}$ をとって、そのときの解を
$\mathbf{y}_{m-1} = (y_{m-1,1}, y_{m-1,2}, \ldots, y_{m-1,m})$ とする

帰納的議論

$$e_1 w_1 + e_2 w_2 + \cdots + e_m w_m = 0$$

の解は

$$a\mathbf{y}_{m-1} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ここで $(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})$ は $e_1 z_1 + e_2 z_2 + \cdots + e_{k-1} z_{k-1} = 0$ の解

帰納的議論

$$e_1 w_1 + e_2 w_2 + \cdots + e_m w_m = 0$$

の解は

$$a\mathbf{y}_{m-1} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ここで $(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})$ は $e_1 z_1 + e_2 z_2 + \cdots + e_{k-1} z_{k-1} = 0$ の解

よって、帰納的に

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = a_1\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{m-1}\mathbf{y}_{m-1},$$

なお、異なる次元のベクトルの和は、次元の低いベクトルの後ろに 0 をつけ足して次元を揃える

よって、帰納的に

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = a_1\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{m-1}\mathbf{y}_{m-1},$$

なお、異なる次元のベクトルの和は、次元の低いベクトルの後ろに 0 をつけ足して次元を揃える

Machin 型公式

$$g_{ij} = l_{i,1}y_{1,j} + l_{i,2}y_{2,j} + \cdots + l_{i,n-1}y_{n-1,j} (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n)$$

より

$$\begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \\ \vdots \\ g_{rj} \end{pmatrix} = y_{1,j} \begin{pmatrix} l_{1,1} \\ l_{2,1} \\ \vdots \\ l_{r,1} \end{pmatrix} + y_{2,j} \begin{pmatrix} l_{1,2} \\ l_{2,2} \\ \vdots \\ l_{r,2} \end{pmatrix} + \cdots + y_{n-1,j} \begin{pmatrix} l_{1,n-1} \\ l_{2,n-1} \\ \vdots \\ l_{r,n-1} \end{pmatrix}$$

だから

$$g_{ij} = l_{i,1}y_{1,j} + l_{i,2}y_{2,j} + \cdots + l_{i,n-1}y_{n-1,j} (1 \le i \le r, 1 \le j \le n)$$

より

$$\begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \\ \vdots \\ g_{rj} \end{pmatrix} = y_{1,j} \begin{pmatrix} l_{1,1} \\ l_{2,1} \\ \vdots \\ l_{r,1} \end{pmatrix} + y_{2,j} \begin{pmatrix} l_{1,2} \\ l_{2,2} \\ \vdots \\ l_{r,2} \end{pmatrix} + \cdots + y_{n-1,j} \begin{pmatrix} l_{1,n-1} \\ l_{2,n-1} \\ \vdots \\ l_{r,n-1} \end{pmatrix}$$

だから

$$
\begin{aligned}
x_j^2+1 =& 2^{\delta_j} p_1^{g_{1j}} p_2^{g_{2j}} \cdots p_r^{g_{rj}} \\
=& 2^{\delta_j} (p_1^{l_{1,1}} p_2^{l_{2,1}} \cdots p_r^{l_{r,1}})^{y_{1,j}} (p_1^{l_{1,2}} p_2^{l_{2,2}} \cdots p_r^{l_{r,2}})^{y_{2,j}} \\
& \cdots (p_1^{l_{1,n-1}} p_2^{l_{2,n-1}} \cdots p_r^{l_{r,n-1}})^{y_{n-1,j}} \\
=& 2^{\delta_j} m_1^{y_{1,j}} m_2^{y_{2,j}} \cdots m_{n-1}^{y_{n-1,j}},
\end{aligned}
$$

ここで

$$
m_i = p_1^{l_{1,i}} p_2^{l_{2,i}} \cdots p_r^{l_{r,i}}
$$

Machin 型公式

$$
\begin{aligned}
x_j^2 + 1 =& 2^{\delta_j} p_1^{g_{1j}} p_2^{g_{2j}} \cdots p_r^{g_{rj}} \\
=& 2^{\delta_j} (p_1^{l_{1,1}} p_2^{l_{2,1}} \cdots p_r^{l_{r,1}})^{y_{1,j}} (p_1^{l_{1,2}} p_2^{l_{2,2}} \cdots p_r^{l_{r,2}})^{y_{2,j}} \\
& \cdots (p_1^{l_{1,n-1}} p_2^{l_{2,n-1}} \cdots p_r^{l_{r,n-1}})^{y_{n-1,j}} \\
=& 2^{\delta_j} m_1^{y_{1,j}} m_2^{y_{2,j}} \cdots m_{n-1}^{y_{n-1,j}},
\end{aligned}
$$

ここで

$$
m_i = p_1^{l_{1,i}} p_2^{l_{2,i}} \cdots p_r^{l_{r,i}}
$$

2 項 Machin 型等式の必要条件

特に (4) が成り立てば

$$x + i = \epsilon_1 (1+i)^s (a+bi)^g, y + i = \epsilon_2 (1+i)^t (a \pm bi)^h$$

（ϵ_1, ϵ_2 は ± 1, $\pm i$ のいずれか）であり

$$x^2 + 1 = 2^s A^g, y^2 + 1 = 2^t A^h$$

が成り立つ（A は素数とは限らない）

2 項 Machin 型等式の必要条件

特に (4) が成り立てば

$$x + i = \epsilon_1(1+i)^s(a+bi)^g, y + i = \epsilon_2(1+i)^t(a \pm bi)^h$$

（ϵ_1, ϵ_2 は ± 1, $\pm i$ のいずれか）であり

$$x^2 + 1 = 2^s A^g, y^2 + 1 = 2^t A^h$$

が成り立つ（A は素数とは限らない）

指数型不定方程式の定理 1

定理 (M. Lebesgue, 1850)

$x^2+1=A^g, x \geq 0$ の解は $g=1, A=x^2+1$ または $(x,A)=(0,1)$ しかない

証明（Gauss 整数に因数分解）

$x > 0$ とすれば g は奇数で

$$x + i = i^s (a + bi)^g, A = a^2 + b^2$$

だから

$$\mathrm{Re}\,(a + bi)^g = \pm 1, \mathrm{Im}\,(a + bi)^g = \pm 1$$

A が偶数のとき $x^2 \equiv 3 \pmod 4$ となって矛盾するから、A は奇数
よって a, b は一方は奇数で一方は偶数

証明（Gauss 整数に因数分解）

$x > 0$ とすれば g は奇数で

$$x + i = i^s (a + bi)^g, A = a^2 + b^2$$

だから

$$\mathrm{Re}\ (a + bi)^g = \pm 1, \mathrm{Im}\ (a + bi)^g = \pm 1$$

A が偶数のとき $x^2 \equiv 3 \pmod 4$ となって矛盾するから、A は奇数
よって a, b は一方は奇数で一方は偶数

証明（Gauss 整数に因数分解）

$x > 0$ とすれば g は奇数で

$$x + i = i^s(a + bi)^g, A = a^2 + b^2$$

だから

$$\mathrm{Re}\ (a + bi)^g = \pm 1, \mathrm{Im}\ (a + bi)^g = \pm 1$$

A が偶数のとき $x^2 \equiv 3 \pmod 4$ となって矛盾するから、A は奇数
よって a, b は一方は奇数で一方は偶数

証明（Gauss 整数に因数分解）

$x > 0$ とすれば g は奇数で

$$x + i = i^s(a + bi)^g, A = a^2 + b^2$$

だから

$$\mathrm{Re}\ (a + bi)^g = \pm 1, \mathrm{Im}\ (a + bi)^g = \pm 1$$

A が偶数のとき $x^2 \equiv 3 \pmod 4$ となって矛盾するから、A は奇数
よって a, b は一方は奇数で一方は偶数

証明（展開）

$$\begin{aligned}\pm 1 =& a^g - \binom{g}{2} a^{g-2} b^2 + \binom{g}{4} a^{g-4} b^4 \cdots + (-1)^{(g-1)/2} g a b^{g-1} \\ =& a \left(a^{g-1} - \binom{g}{2} a^{g-3} b^2 + \binom{g}{4} a^{g-5} b^4 \cdots + (-1)^{(g-1)/2} g b^{g-1} \right)\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\pm 1 =& g a^{g-1} b + \binom{g}{3} a^{g-3} b^3 \cdots + (-1)^{(g-1)/2} b^g \\ =& b \left(g a^{g-1} - \binom{g}{3} a^{g-3} b^2 + \cdots + (-1)^{(g-1)/2} b^{g-1} \right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pm 1 =& a^g - \binom{g}{2} a^{g-2} b^2 + \binom{g}{4} a^{g-4} b^4 \cdots + (-1)^{(g-1)/2} g a b^{g-1} \\
=& a \left(a^{g-1} - \binom{g}{2} a^{g-3} b^2 + \binom{g}{4} a^{g-5} b^4 \cdots + (-1)^{(g-1)/2} g b^{g-1} \right)
\end{aligned}
$$

あるいは

$$
\begin{aligned}
\pm 1 =& g a^{g-1} b + \binom{g}{3} a^{g-3} b^3 \cdots + (-1)^{(g-1)/2} b^g \\
=& b \left(g a^{g-1} - \binom{g}{3} a^{g-3} b^2 + \cdots + (-1)^{(g-1)/2} b^{g-1} \right)
\end{aligned}
$$

実は a, b を入れ替えれば両者は等価なので

$$\pm 1 = a(ga^{g-1}b - \binom{g}{3}a^3b^{g-3} + \cdots + (-1)^{(g-1)/2}b^g)$$

としてもよい

このとき $a = \pm 1$, b は偶数、つまり $A = b^2 + 1$

証明（対称性）

実は a, b を入れ替えれば両者は等価なので

$$\pm 1 = a\left(ga^{g-1}b - \binom{g}{3}a^3b^{g-3} + \cdots + (-1)^{(g-1)/2}b^g\right)$$

としてもよい

このとき $a = \pm 1$, b は偶数、つまり $A = b^2 + 1$

証明（Pell 方程式に還元）

よって

$$x^2 + 1 = (b^2 + 1)^g$$

つまり

$$x^2 - (b^2 + 1)^g = -1$$

しかし

$$x^2 - Ay^2 = -1, y = (A^2 + 1)^{(g-1)/2}$$

なので、Størmer の定理より y=1, つまり g=1 となって矛盾

証明（Pell 方程式に還元）

よって

$$x^2 + 1 = (b^2 + 1)^g$$

つまり

$$x^2 - (b^2 + 1)^g = -1$$

しかし

$$x^2 - Ay^2 = -1, y = (A^2 + 1)^{(g-1)/2}$$

なので、Størmer の定理より y=1, つまり g=1 となって矛盾

証明（Pell 方程式に還元）

よって

$$x^2 + 1 = (b^2 + 1)^g$$

つまり

$$x^2 - (b^2 + 1)^g = -1$$

しかし

$$x^2 - Ay^2 = -1, y = (A^2 + 1)^{(g-1)/2}$$

なので、Størmer の定理より y=1, つまり g=1 となって矛盾

証明（Pell 方程式に還元）

よって

$$x^2 + 1 = (b^2 + 1)^g$$

つまり

$$x^2 - (b^2 + 1)^g = -1$$

しかし

$$x^2 - Ay^2 = -1, y = (A^2 + 1)^{(g-1)/2}$$

なので、Størmer の定理より y=1, つまり g=1 となって矛盾

定理 (Størmer, 1895)

$x^2+1=2A^g, x\geq 0, g=2m+1$ の解は $g=1, A=(x^2+1)/2$ または $(x,A)=(1,1)$ しかない

証明（x は奇数）

x^2+1 が偶数だから x は奇数なので $x=2y+1$ とおくと

$$y^2+(y+1)^2=2y^2+2y+1=A^g$$

だから

$$y+(y+1)i=\pm(a+bi)^g,\pm i(a+bi)^g.$$

証明（x は奇数）

x^2+1 が偶数だから x は奇数なので $x=2y+1$ とおくと

$$y^2+(y+1)^2=2y^2+2y+1=A^g$$

だから

$$y+(y+1)i=\pm(a+bi)^g,\pm i(a+bi)^g.$$

証明（x は奇数）

x^2+1 が偶数だから x は奇数なので $x=2y+1$ とおくと

$$y^2+(y+1)^2=2y^2+2y+1=A^g$$

だから

$$y+(y+1)i=\pm(a+bi)^g,\pm i(a+bi)^g.$$

証明（実部と虚部を比較）

つまり

$$\mathrm{Re}\ ((a+bi)^g) \pm \mathrm{Im}\ ((a+bi)^g) = \pm 1$$

だが

$$\begin{aligned}(X+Yi) - i(X-Yi) =& (X-Y) + (Y-X)i = (X-Y)(1-i),\\ (X+Yi) + i(X-Yi) =& (X+Y) + (X+Y)i = (X+Y)(1+i)\end{aligned}$$

なので

$$(a+bi)^g \pm i(a-bi)^g = \pm 1 \pm i$$

（いずれも複号任意）

証明（実部と虚部を比較）

つまり

$$\mathrm{Re}\left((a+bi)^g\right) \pm \mathrm{Im}\left((a+bi)^g\right) = \pm 1$$

だが

$$\begin{aligned}(X+Yi) - i(X-Yi) =& (X-Y) + (Y-X)i = (X-Y)(1-i), \\ (X+Yi) + i(X-Yi) =& (X+Y) + (X+Y)i = (X+Y)(1+i)\end{aligned}$$

なので

$$(a+bi)^g \pm i(a-bi)^g = \pm 1 \pm i$$

（いずれも複号任意）

証明（実部と虚部を比較）

つまり

$$\mathrm{Re}\left((a+bi)^g\right) \pm \mathrm{Im}\left((a+bi)^g\right) = \pm 1$$

だが

$$\begin{aligned}(X+Yi)-i(X-Yi) &= (X-Y)+(Y-X)i = (X-Y)(1-i),\\ (X+Yi)+i(X-Yi) &= (X+Y)+(X+Y)i = (X+Y)(1+i)\end{aligned}$$

なので

$$(a+bi)^g \pm i(a-bi)^g = \pm 1 \pm i$$

（いずれも複号任意）

g は奇数だから

$(1\pm i)a+(\pm 1+i)b=(a\pm b)+(b\pm a)i=(a+bi)\pm i(a-bi)=\pm 1,\pm i,\pm 1\pm i$

（最右辺以外の符号はすべて一致）

左辺は $1+i$ で割り切れるから

$$(1+i)(a+b)=\pm 1\pm i \text{ または } (1-i)(a-b)=\pm 1\pm i$$

より $a+b=\pm 1$

証明（$a+b=1$）

g は奇数だから

$$(1 \pm i)a + (\pm 1 + i)b = (a \pm b) + (b \pm a)i = (a + bi) \pm i(a - bi) = \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i$$

（最右辺以外の符号はすべて一致）
左辺は $1+i$ で割り切れるから

$$(1+i)(a+b) = \pm 1 \pm i \text{ または } (1-i)(a-b) = \pm 1 \pm i$$

より $a+b=\pm 1$

証明（$a+b=1$）

g は奇数だから

$(1\pm i)a+(\pm 1+i)b=(a\pm b)+(b\pm a)i=(a+bi)\pm i(a-bi)=\pm 1,\pm i,\pm 1\pm i$

（最右辺以外の符号はすべて一致）
左辺は $1+i$ で割り切れるから

$$(1+i)(a+b)=\pm 1\pm i \text{ または } (1-i)(a-b)=\pm 1\pm i$$

より $a+b=\pm 1$

証明（A の形を決定）

よって

$$a + bi = (a + (a \pm 1)i)$$

だから

$$A = a + (a \pm 1)^2 = 2a^2 \pm 2a + 1$$

より

$$(2a \pm 1)^2 + 1 = 2A$$

証明（A の形を決定）

よって

$$a + bi = (a + (a \pm 1)i)$$

だから

$$A = a + (a \pm 1)^2 = 2a^2 \pm 2a + 1$$

より

$$(2a \pm 1)^2 + 1 = 2A$$

証明（A の形を決定）

よって

$$a + bi = (a + (a \pm 1)i)$$

だから

$$A = a + (a \pm 1)^2 = 2a^2 \pm 2a + 1$$

より

$$(2a \pm 1)^2 + 1 = 2A$$

証明（やはり Pell 方程式に還元）

$$x^2 + 1 = 2A^g, g = 2m + 1$$

なので

$$x^2 - 2A(A^{(g-1)/2})^2 = -1$$

だから Størmer の定理より $g = 1$

証明（やはり Pell 方程式に還元）

$$x^2 + 1 = 2A^g, g = 2m + 1$$

なので

$$x^2 - 2A(A^{(g-1)/2})^2 = -1$$

だから Størmer の定理より $g = 1$

証明（やはり Pell 方程式に還元）

$$x^2 + 1 = 2A^g, g = 2m + 1$$

なので

$$x^2 - 2A(A^{(g-1)/2})^2 = -1$$

だから Størmer の定理より $g = 1$

指数型不定方程式の定理 3

定理 (Størmer, 1896)

$$x+i=\epsilon_1(1+i)^s(a+bi), y+i=\epsilon_2(1+i)^t(a\pm bi)^{2^k}$$

の解は $(x,y)=(2,3),(2,7),(3,7),(5,239)$ しかない

この証明は今までの議論と類似しているが、Størmer の定理を使うことができないので Størmer の定理の証明で行ったように、整除性を注意深く調べなければならない

この証明は省略

指数型不定方程式の定理 3

定理 (Størmer, 1896)

$$x + i = \epsilon_1(1+i)^s(a+bi), y + i = \epsilon_2(1+i)^t(a \pm bi)^{2^k}$$

の解は $(x, y) = (2, 3), (2, 7), (3, 7), (5, 239)$ しかない

この証明は今までの議論と類似しているが、Størmer の定理を使うことができないので Størmer の定理の証明で行ったように、整除性を注意深く調べなければならない

この証明は省略

定理 (Størmer, 1896)

$$x+i=\epsilon_1(1+i)^s(a+bi), y+i=\epsilon_2(1+i)^t(a\pm bi)^{2^k}$$

の解は $(x,y)=(2,3),(2,7),(3,7),(5,239)$ しかない

この証明は今までの議論と類似しているが、Størmer の定理を使うことができないので Størmer の定理の証明で行ったように、整除性を注意深く調べなければならない
この証明は省略

指数型不定方程式の定理の応用

指数型不定方程式の 3 つの定理を合わせると (4) のすべての可能性が確かめられ、次のことがわかる

定理 (Størmer, 1896)

2 項の Machin 型公式は 4 つしかない

指数型不定方程式の定理の応用

指数型不定方程式の 3 つの定理を合わせると (4) のすべての可能性が確かめられ、次のことがわかる

定理 (Størmer, 1896)

2 項の Machin 型公式は 4 つしかない

註（指数型不定方程式のその後の結果）

先にも触れたように、その後 $x^2+1=2y^4, x, y>0$ の解が $(x,y)=(1,1),(239,13)$ しかないことが証明されているので $x^2+1=2y^n, n>2$ は完全に解かれている

註（逆は成り立たない）

なお

$$x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} m_1^{y_{1,j}} m_2^{y_{2,j}} \cdots m_{n-1}^{y_{n-1,j}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つからといって

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

が成り立つとは限らない（m_i が素数ならば成り立つ）

註（逆は成り立たない）

なお

$$x_j^2 + 1 = 2^{\delta_j} m_1^{y_{1,j}} m_2^{y_{2,j}} \cdots m_{n-1}^{y_{n-1,j}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つからといって

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

が成り立つとは限らない（m_i が素数ならば成り立つ）

註（必要十分条件）

ただし、上記に加えて $x_i^2+1 \equiv x_j^2+1 \equiv 0 \pmod{m_k}$ となる i,j について必ず $x_i \pm x_j \equiv 0 \pmod{m_k}$ が成り立てば

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \arctan \frac{1}{x_j} = \frac{k\pi}{4}$$

が成り立ち、かつ逆も成り立つことが言える

註（必要十分条件）

ただし、上記に加えて $x_i^2+1\equiv x_j^2+1\equiv 0 \pmod{m_k}$ となる i,j について必ず $x_i\pm x_j\equiv 0 \pmod{m_k}$ が成り立てば

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \arctan\frac{1}{x_j}=\frac{k\pi}{4}$$

が成り立ち、かつ逆も成り立つことが言える

しかし…

しかし、その場合でも $k = 0$ の可能性があるので Machin 型公式が得られるとは限らない！

たとえば Størmer, 1896 でも指摘されているが

$$\arctan \frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x+1} - \arctan \frac{1}{x^2+x+1} = 0$$

が成り立つ

しかし…

しかし、その場合でも $k=0$ の可能性があるので Machin 型公式が得られるとは限らない！
たとえば Størmer, 1896 でも指摘されているが

$$\arctan\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x+1}-\arctan\frac{1}{x^2+x+1}=0$$

が成り立つ

第 3 部

関連問題

3 項 Machin 型等式

$$a \arctan \frac{1}{x} + b \arctan \frac{1}{y} + c \arctan \frac{1}{z} = \frac{k\pi}{4}, k \neq 0 \tag{5}$$

の解をすべて見つけよ

2 項 Machin 型等式から

$$a \arctan \frac{1}{2} + (a+2b) \arctan \frac{1}{3} + b \arctan \frac{1}{7} = \frac{(a+b)\pi}{4} \tag{6}$$

が成り立つ

この他に Simson, 1723 による

$$8 \arctan \frac{1}{10} - \arctan \frac{1}{239} - 4 \arctan \frac{1}{515} = \frac{\pi}{4}$$

などが知られており、Størmer は（2 項 Machin 型等式から導かれない）102 個の解を上げている

その後 Wrench, 1930 （とされているが不明）によって

$$5 \arctan \frac{1}{2} + 2 \arctan \frac{1}{53} + \arctan \frac{1}{4443} = \frac{3\pi}{4}$$

が発見されたが、現在その他の 3 項 Machin 型等式は知られていない

2 項 Machin 型等式から

$$a\arctan\frac{1}{2}+(a+2b)\arctan\frac{1}{3}+b\arctan\frac{1}{7}=\frac{(a+b)\pi}{4} \tag{6}$$

が成り立つ
この他に Simson, 1723 による

$$8\arctan\frac{1}{10}-\arctan\frac{1}{239}-4\arctan\frac{1}{515}=\frac{\pi}{4}$$

などが知られており、Størmer は（2 項 Machin 型等式から導かれない）102 個の解を上げている
その後 Wrench, 1930 （とされているが不明）によって

$$5\arctan\frac{1}{2}+2\arctan\frac{1}{53}+\arctan\frac{1}{4443}=\frac{3\pi}{4}$$

が発見されたが、現在その他の 3 項 Machin 型等式は知られていない

3 項 Machin 型等式の例

2 項 Machin 型等式から

$$a \arctan\frac{1}{2} + (a+2b)\arctan\frac{1}{3} + b\arctan\frac{1}{7} = \frac{(a+b)\pi}{4} \tag{6}$$

が成り立つ
この他に Simson, 1723 による

$$8\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{239} - 4\arctan\frac{1}{515} = \frac{\pi}{4}$$

などが知られており、Størmer は（2 項 Machin 型等式から導かれない）102 個の解を上げている
その後 Wrench, 1930 （とされているが不明）によって

$$5\arctan\frac{1}{2} + 2\arctan\frac{1}{53} + \arctan\frac{1}{4443} = \frac{3\pi}{4}$$

が発見されたが、現在その他の 3 項 Machin 型等式は知られていない

3 項 Machin 型等式の有限性

定理 (T.Y., preprint 2018, revised in 2019)

(6) 以外の 3 項 Machin 型等式は有限個である（T.Y., preprint, 2018, revised in 2019）

具体的には (a, b, c, x, y, z) が (6) 以外の (5) の解ならば

$$
\begin{aligned}
a, b, c &< 1.29 \times 10^{22}, \\
x, y, z &< \exp(1.606 \times 10^{11})
\end{aligned}
$$

となる

定理 (T.Y., preprint 2018, revised in 2019)

(6) 以外の 3 項 Machin 型等式は有限個である（T.Y., preprint, 2018, revised in 2019）

具体的には (a, b, c, x, y, z) が (6) 以外の (5) の解ならば

$$\begin{aligned} a, b, c <& 1.29 \times 10^{22}, \\ x, y, z <& \exp(1.606 \times 10^{11}) \end{aligned}$$

となる

与えられた項数の Machin 型等式の有限性

与えられた k に対して

$$y_1 \arctan \frac{1}{x_1} + y_2 \arctan \frac{1}{x_2} + \cdots + y_k \arctan \frac{1}{x_k} = \frac{k\pi}{4}, k \neq 0$$

の解は、より項の数の少ない等式から得られるものを除いて有限個であることが証明できそう（T.Y., 2019-2020）

指数型不定方程式の解の個数

Ramanujan-Nagell 型方程式

$$x^2 + D = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}, x > 0$$

の解の個数は？

Ramanujan-Nagell 方程式

Nagell, 1948

$$x^2 + 7 = 2^n$$

は 5 つの解 $(x, n) = (1, 3), (3, 4), (5, 5), (11, 7), (181, 15)$ をもつ

一般化

定理 (Apéry, 1960)

$$x^2 + D = p^n$$

は $(D, p) = (7, 2)$ の場合を除いて解はあっても 2 つ

定理 (Beukers, 1981)

$$x^2 + D = 2^n$$

は $D = 15, 2^k - 1$ の場合を除いて解はあっても 1 つ

一般化

定理 (Apéry, 1960)

$$x^2 + D = p^n$$

は $(D, p) = (7, 2)$ の場合を除いて解はあっても 2 つ

定理 (Beukers, 1981)

$$x^2 + D = 2^n$$

は $D = 15, 2^k - 1$ の場合を除いて解はあっても 1 つ

多素数への一般化

定理 (Evertse, 1984)

$$x^2 + D = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

の解の個数は $3 \times 7^{4r+6}$ 個以下

定理 (T. Y., 2018-2019)

$$x^2 + D = 4^s p_1^{e_1} p_2^{e_2}, s = 0, 1$$

の解の個数は 63 個以下

多素数への一般化

定理 (Evertse, 1984)

$$x^2 + D = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

の解の個数は $3 \times 7^{4r+6}$ 個以下

定理 (T. Y., 2018-2019)

$$x^2 + D = 4^s p_1^{e_1} p_2^{e_2}, s = 0, 1$$

の解の個数は 63 個以下

関連する結果

定理 (T. Y., preprint, 2018-2019)

$l \geq 17, p \equiv q \equiv 1 \pmod{l}$ が 3 つとも素数のとき

$$\frac{x^l - 1}{x - 1} = p^m q, m \geq 0$$

の解 (x, m) の個数は 5 個以下、また解の個数が 5 個の場合それらを $(x_i, m_i)(m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < m_5)$ とおくと $m_1 = 0$ かつ、$x_2 = x_1^r$ となる素数 r が存在する

現時点で解ける見込みのない問題

3 項消滅式

$$a \arctan\frac{1}{x} + b \arctan\frac{1}{y} + c \arctan\frac{1}{z} = 0$$

の解をすべて見つけよ。

現時点で解ける見込みのない問題

2 素数 Ramanujan-Nagell 型方程式の解の個数

D, p, q が大きいとき

$$x^2 + D = 4^s p^k q^l$$

の解の個数は 4 個以下か？

現時点で解ける見込みのない問題

多素数 Ramanujan-Nagell 型方程式の解の個数

正の整数 D 、素数 $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ を任意に動かしたときの

$$x^2 + D = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

の解の個数の最大値を $f(r)$ とおく。$f(r)$ の増大の速さを求めよ（r の多項式の速さとなるか？）

現時点で解ける見込みのない問題

多素数 Ramanujan-Nagell 型方程式の解の個数

正の整数 D 、素数 $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ を任意に動かしたときの

$$x^2 + D = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

の解の個数の最大値を $f(r)$ とおく。$f(r)$ の増大の速さを求めよ（r の多項式の速さとなるか？）

現時点で解ける見込みのない問題

係数つき Ramanujan-Nagell 型方程式の解の個数 (Yann Bugeaud, 2007)

D, k を正の整数、p を素数とする

$$x^2 + D = kp^n$$

の解の個数は有限だが、その個数には D, k, p に無関係な上限が存在するか？

なお、$x^2 + 119 = 15 \times 2^n$ は 6 個の解をもつ (Stiller)

現時点で解ける見込みのない問題

係数つき Ramanujan-Nagell 型方程式の解の個数 (Yann Bugeaud, 2007)

D, k を正の整数、p を素数とする

$$x^2 + D = kp^n$$

の解の個数は有限だが、その個数には D, k, p に無関係な上限が存在するか？

なお、$x^2 + 119 = 15 \times 2^n$ は 6 個の解をもつ (Stiller)

現時点で解ける見込みのない問題

係数つき Ramanujan-Nagell 型方程式の解の個数 (Yann Bugeaud, 2007)

D, k を正の整数、p を素数とする

$$x^2 + D = kp^n$$

の解の個数は有限だが、その個数には D, k, p に無関係な上限が存在するか？

なお、$x^2 + 119 = 15 \times 2^n$ は 6 個の解をもつ (Stiller)

References

R. Apéry, Sur une équation diophantinne, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 251 (1960), 1451–1452.

F. Beukers, On the generalize Ramanujan-Nagell equation I, Acta Arith. 38 (1980/81), 389–410.

J.-H. Evertse, On equations in S-units and the Thue-Mahler equation, Inv. Math. 75 (1984), 561–584.

T. Nagell, The diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$ (in Norwegian), Nork. Mat. Tidsskr. 30 (1948), 62–64, English version: Ark. Mat. 4 (1960), 185–187.

Ian Tweddle, John Machin and Robert Simson on inverse-tangent series for π, Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), 1–14.

References

R. Apéry, Sur une équation diophantinne, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 251 (1960), 1451–1452.

F. Beukers, On the generalize Ramanujan-Nagell equation I, Acta Arith. 38 (1980/81), 389–410.

J.-H. Evertse, On equations in S-units and the Thue-Mahler equation, Inv. Math. 75 (1984), 561–584.

T. Nagell, The diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$ (in Norwegian), Nork. Mat. Tidsskr. 30 (1948), 62–64, English version: Ark. Mat. 4 (1960), 185–187.

Ian Tweddle, John Machin and Robert Simson on inverse-tangent series for π, Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), 1–14.

References

R. Apéry, Sur une équation diophantinne, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 251 (1960), 1451–1452.

F. Beukers, On the generalize Ramanujan-Nagell equation I, Acta Arith. 38 (1980/81), 389–410.

J.-H. Evertse, On equations in S-units and the Thue-Mahler equation, Inv. Math. 75 (1984), 561–584.

T. Nagell, The diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$ (in Norwegian), Nork. Mat. Tidsskr. 30 (1948), 62–64, English version: Ark. Mat. 4 (1960), 185–187.

Ian Tweddle, John Machin and Robert Simson on inverse-tangent series for π, Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), 1–14.

References

R. Apéry, Sur une équation diophantinne, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 251 (1960), 1451–1452.

F. Beukers, On the generalize Ramanujan-Nagell equation I, Acta Arith. 38 (1980/81), 389–410.

J.-H. Evertse, On equations in S-units and the Thue-Mahler equation, Inv. Math. 75 (1984), 561–584.

T. Nagell, The diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$ (in Norwegian), Nork. Mat. Tidsskr. 30 (1948), 62–64, English version: Ark. Mat. 4 (1960), 185–187.

Ian Tweddle, John Machin and Robert Simson on inverse-tangent series for π, Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), 1–14.

R. Apéry, Sur une équation diophantinne, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 251 (1960), 1451–1452.

F. Beukers, On the generalize Ramanujan-Nagell equation I, Acta Arith. 38 (1980/81), 389–410.

J.-H. Evertse, On equations in S-units and the Thue-Mahler equation, Inv. Math. 75 (1984), 561–584.

T. Nagell, The diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$ (in Norwegian), Nork. Mat. Tidsskr. 30 (1948), 62–64, English version: Ark. Mat. 4 (1960), 185–187.

Ian Tweddle, John Machin and Robert Simson on inverse-tangent series for π, Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), 1–14.

Carl Størmer, Solution complète en nombres entiers m, n, x, y, k de l'équation $m\text{arc tg}\frac{1}{x} + n\text{arc tg}\frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$, Skrift. Vidensk. Christiania I. Math. -naturv. Klasse 1895, Nr. 11, 21 pages.

Carl Størmer, Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes a la solution en nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n, k$ de l'équation: $c_1\text{arc tg}x_1 + c_2\text{arc tg}x_2 + \cdots + c_n\text{arc tg}x_n = k\frac{\pi}{4}$, Arch. Math. Naturv. 19 (1896), Nr. 3, 96 pages.

Carl Størmer, Quelques théorèmes sur l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ et leurs applications, Skrift. Vidensk. Christiania I. Math. -naturv. Klasse 1897, Nr. 2, 48 pages.

References

Carl Størmer, Solution complète en nombres entiers m, n, x, y, k de l'équation $m\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{x} + n\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$, Skrift. Vidensk. Christiania I. Math. -naturv. Klasse 1895, Nr. 11, 21 pages.

Carl Størmer, Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes a la solution en nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n, k$ de l'équation: $c_1\mathrm{arc\ tg}x_1 + c_2\mathrm{arc\ tg}x_2 + \cdots + c_n\mathrm{arc\ tg}x_n = k\frac{\pi}{4}$, Arch. Math. Naturv. 19 (1896), Nr. 3, 96 pages.

Carl Størmer, Quelques théorèmes sur l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ et leurs applications, Skrift. Vidensk. Christiania I. Math. -naturv. Klasse 1897, Nr. 2, 48 pages.

References

Carl Størmer, Solution complète en nombres entiers m, n, x, y, k de l'équation $m\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{x} + n\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$, Skrift. Vidensk. Christiania I. Math. -naturv. Klasse 1895, Nr. 11, 21 pages.

Carl Størmer, Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes a la solution en nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n, k$ de l'équation: $c_1\mathrm{arc\ tg}x_1 + c_2\mathrm{arc\ tg}x_2 + \cdots + c_n\mathrm{arc\ tg}x_n = k\frac{\pi}{4}$, Arch. Math. Naturv. 19 (1896), Nr. 3, 96 pages.

Carl Størmer, Quelques théorèmes sur l'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ et leurs applications, Skrift. Vidensk. Christiania I. Math. -naturv. Klasse 1897, Nr. 2, 48 pages.

References

T. Y., A generalization of the Ramanujan-Nagell equation, Glasgow Math. J. 61 (2019), 535–544.

T. Y., An exponential diophantine equation related to odd perfect numbers, arXiv:1802.09195.

Some open problems about diophantine equations, edited by J.-H. Evertse, http://www.math.leidenuniv.nl/ evertse/07-workshop-problems.pdf

References

T. Y., A generalization of the Ramanujan-Nagell equation, Glasgow Math. J. 61 (2019), 535–544.

T. Y., An exponential diophantine equation related to odd perfect numbers, arXiv:1802.09195.

Some open problems about diophantine equations, edited by J.-H. Evertse, http://www.math.leidenuniv.nl/ evertse/07-workshop-problems.pdf

T. Y., A generalization of the Ramanujan-Nagell equation, Glasgow Math. J. 61 (2019), 535–544.

T. Y., An exponential diophantine equation related to odd perfect numbers, arXiv:1802.09195.

Some open problems about diophantine equations, edited by J.-H. Evertse, http://www.math.leidenuniv.nl/ evertse/07-workshop-problems.pdf

MANY THANKS FOR YOUR ATTENTION

To be continued...?

Tomohiro Yamada
Center for Japanese language and culture
Osaka University
562-8558
8-1-1, Aomatanihigashi, Minoo, Osaka
Japan
e-mail: tyamada1093@gmail.com