微分積分1 試験解答例

担当 山田智宏

1. 1) (15点)

$$(t^{1/t})' = (e^{(\log t)/t})'$$

となるが、

$$\left(\frac{\log t}{t}\right)' = \frac{1}{t^2} - \frac{\log t}{t^2}$$

だから、

$$(t^{1/t})' = \frac{t^{1/t}(1-\log t)}{t^2}.$$

2) (15点) $x = \sin y, -\pi/2 < y < \pi/2$ とおくと

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cos y}$$

となるが、$-\pi/2 < y < \pi/2$ より $\cos y > 0$ なので $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\left(t\sqrt{4-t^2} + 4\arcsin\frac{t}{2}\right)' =& \sqrt{4-t^2} + \frac{-t^2}{\sqrt{4-t^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-(t/2)^2}} \\ =& \sqrt{4-t^2} + \frac{-t^2}{\sqrt{4-t^2}} + \frac{4}{\sqrt{4-t^2}} \\ =& \sqrt{4-t^2} + \frac{4-t^2}{\sqrt{4-t^2}} \\ =& 2\sqrt{4-t^2}.\end{aligned}$$

注意 $\arcsin x$ を $1/\sin x$ などと混同しないように注意。

2. $t \neq 0$ のとき、x が t の近くでも $f(x) = x^2\sin(1/x)$ となるから、t の近くで

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

となる。よって $x \neq 0$ のときはつねに

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

となる。一方 $x=0$ のとき

$$f'(0)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

となるが、$|x\sin(1/x)|\le |x|$ であるから $f'(0)=0$ となる。

$t\neq 0$ のとき、x が t の近くで、$f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$ となるから、$f'(x)$ は $x=t$ で連続である。一方、$f'(0)=0$ だが、$x\neq 0$ が 0 に近いとき $f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$ となる。これは 0 に近づかない（たとえば、n が 0 でない整数で $x=1/(2\pi n)$ のとき $f'(x)=-1$ となる）ので、$f'(x)$ は $x=0$ では連続ではない。(30 点)

注意 $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)=\lim_{y\to\pm\infty}(\sin y)/y$ を $\lim_{x\to\pm\infty} x\sin(1/x)=\lim_{y\to 0}(\sin y)/y=1$ と混同しないように注意。

3. 1) $x=\tan y, -\pi/2<y<\pi/2$ とおくと

$$(\arctan x)'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

となる。一方 $x>0$ のとき

$$1-x^2=\frac{1-x^4}{1+x^2}<\frac{1}{1+x^2}<\frac{1+x^6}{1+x^2}=1-x^2+x^4$$

で、$x-x^3/3, \arctan x, x-x^3/3+x^5/5$ はいずれも $x=0$ のときに 0 となるから、$x>0$ のとき

$$x-\frac{x^3}{3}<\arctan x<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$

となる。(15 点)

2) (10 点) $\theta=\arctan(1/5), \psi=\arctan(1/239$ とおくと $\tan\theta=1/5, \tan\psi=1/239$ となる。よって

$$\begin{aligned}
\tan(2\theta)=&\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{5}{12},\\
\tan(4\theta)=&\frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)}=\frac{120}{119},\\
\tan(4\theta-\psi)=&\frac{\tan(4\theta)-\tan(\psi)}{1+\tan(4\theta)\tan\psi}\\
=&\frac{1+\frac{1}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times 239}}\\
=&1
\end{aligned}$$

となる。よって $4\theta-\psi=\frac{\pi}{4}+n\pi$ となる整数 n が存在するが、$0<\tan\theta,\tan\psi<1$ なので $0<\psi,\theta<\pi/4$ となるから、$-\pi/4<4\theta-\psi<\pi$ となる。よって

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=4\theta-\psi=\frac{\pi}{4}.$$

注意 この問題は正確な値をわかりやすい形であらわす問題であるので、1) とは直接は関係しない。1) は次の 3) で利用する。

3) 2) を用い、それから 1) を利用すると

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} > \frac{4}{5} - \frac{4}{375} - \frac{1}{239}$$

となるが、$4/5 = 0.8$, $4/375 = 32/3000 = 0.010666\cdots$, $1/239 = 0.0041841\cdots$ なので $\pi/4 > 0.8 - 0.0107 - 0.0042 > 0.785$ となる。よって $\pi > 3.14$ となる。(15 点)