微分積分入門1 試験解答例

担当 山田智宏

計算・論証の過程を式と文章によって説明すること。ただし講義中に取り扱った判定法や補題、定理など、および高等学校までに学習している定理（三角関数の加法定理など）は証明なしで用いてよい。

1. 1) (10 点) $(t^2\sin t)' = 2t\sin t + t^2\cos t.$

   2) (15 点) $(f(e^t))' = f'(e^t)(e^t)' = e^t/\log(e^t) = e^t/t.$

   3) (20 点) まず

$$\begin{aligned}\left(\frac{2+\sqrt{4-t^2}}{t}\right)' =& \frac{-t}{t\sqrt{4-t^2}} - \frac{2+\sqrt{4-t^2}}{t^2}\\ =& -\frac{1}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{2+\sqrt{4-t^2}}{t^2}\\ =& -\frac{2+\frac{4-t^2}{\sqrt{4-t^2}}+\frac{t^2}{\sqrt{4-t^2}}}{t^2}\\ =& -\frac{2+\frac{4}{\sqrt{4-t^2}}}{t^2}\end{aligned}$$

   なので

$$\begin{aligned}\left(\log\frac{2+\sqrt{4-t^2}}{t}\right)' =& -\frac{\left(2+\frac{4}{\sqrt{4-t^2}}\right)/t^2}{(2+\sqrt{4-t^2})/t}\\ =& -\frac{2+\frac{4}{\sqrt{4-t^2}}}{t(2+\sqrt{4-t^2})}\\ =& -\frac{2\sqrt{4-t^2}+4}{t(2+\sqrt{4-t^2})\sqrt{4-t^2}}\\ =& -\frac{2}{t\sqrt{4-t^2}}.\end{aligned}$$

2. $f(t) = e^{t\log(1+1/t)}$ なので、

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = (t\log(1+1/t))' = \log(1+1/t) + t\frac{-1/t^2}{1+1/t} = \log(1+1/t) - \frac{1}{1+t}$$

   となる。そこで、$u=1/t$ とおくと右辺は $\log(1+u)-u/(1+u)$ となる。これを $g(u)$ とおくと $g(0)=0$ かつ $u>0$ のとき $g'(u) = 1/(1+u) - 1/(1+u)^2 > 0$

となるから $u > 0$ のとき $g(u) > 0$、つまり $t > 0$ のとき $f'(t)/f(t) > 0$ となる。$f(t)$ は明らかに正であるから $t > 0$ のとき $f'(t) > 0$ となる。つまり $f(t)$ は $t > 0$ において単調増加である。(15 点)

3. 1) (20 点) $\sin 0 = 0$ かつ $x > 0$ のとき $0 < \cos x < 1$ なので、$x > 0$ のとき $0 < \sin x < x$ となる。つまり $x > 0$ のとき $0 > (\cos x)' = -\sin x > -x$ となる。これと $\cos 0 = 1$ から、$x > 0$ のとき

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

となる。再び $\sin 0 = 0$ を用いると $x > 0$ のとき

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

となる。つまり $x > 0$ のとき $(\cos x)' < -x + x^3/6$ となるので、再び $\cos 0 = 1$ を用いると $x > 0$ のとき

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

となる。再び $\sin 0 = 0$ を用いると $x > 0$ のとき

$$\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

2) (20 点) $e^0 = 1$ かつ $x > 0$ のとき $(e^x)' = e^x > 1$ なので、$x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$. 再び $e^0 = 1$ より $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$. 一方、$0 \leq t < x$ のとき $(e^t)' = e^t < e^x$ だから、$0 \leq t \leq x$ のとき $e^t < 1 + te^x$ となる。とくに $e^x < 1 + xe^x$ つまり $(1-x)e^x < 1$ となるので、$0 < x < 1$ のとき

$$e^x < \frac{1}{1-x}.$$