

微分積分1 (2023 火1 / 山田) レポート問題

計算・論証の過程を式と文章によって説明すること。ただし講義中に取り扱った判定法や補題、定理など、および高等学校までに学習している定理（三角関数に関する加法定理などの基本公式、指数関数・対数関数・三角関数の微分法）は証明なしで用いてよい。

1. 双曲線関数を

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

により定める。つぎの公式を証明せよ。

1) $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$. (10 点)

2) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$. (10 点)

3) $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$. ただし $|x| < 1$ について $t = \operatorname{arctanh} x$ は $\tanh t = x$ となる t と定める。(15 点)

2. 次の関数を t で微分せよ。

1) $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$. (15 点) 2) $\tanh t$. (15 点)

3. $f(x)$ を $f(0) = 0$ かつ $x \neq 0$ のとき

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

により定義する。

1) $f(x)$ は実数全体で微分可能であることを確かめ、 $f'(x)$ を求めよ。(15 点)

2) $f'(x)$ は実数全体で連続か？連続でない点があるとき、その点を求めよ。(20 点)