小学校教科内容論算数（第1回）

山田智宏 (Tomohiro Yamada)

1　自然数の定義

この講義では、当面、「数」の中でももっとも基本的なものである自然数について扱う。自然数は、歴史的には「ものを数える」という営みから生まれたもので、数の原点ともいえる。現代の数学の理論体系においても、数の概念を定義するときは、通常、自然数を定義し、それを出発点として、他の数を定義する。

まず、$(0), 1, 2, \ldots$ のような数を自然数と定義する。

ここで、早速だが 0 の扱いが問題となる。はじめに述べたとおり、歴史上、「数」は「ものを数える」概念から現れており、「ものが存在しない状態」を表す 0 を含めず、1 から始まる正の整数を基本としていた。太古における 0 の扱いは文明によって異なる。

19 世紀に入って、自然数の集合論的な定義がなされたが、この定義では自然数に 0 を含めるのが便利である。ただ、一般的な整数論の議論では、0 を自然数には含めないほうが自然であることが多い（0 は「すべての素数で割れる」数となり、特に無限個の素因数を持つことになってしまうため)。日本の中等教育（中学校・高等学校の教育、「高等教育」は大学・短期大学・高等専門学校の教育を指すので誤解のないよう注意）でも、 0 は自然数に含めないと教えられる。

ただ、算数、つまり四則演算について語る上では 0 も含めることが便利なことが多いので、本講義では $0, 1, 2, \ldots$ について扱うことにする。

上記の通り自然数は「ものを数える」概念から現れた。つまり、$1 = 0^+, 2 = 1^+, \ldots$ といった具合に 0 から順番に自然数を定めていく。

1.1　公理的な定義

公理的に自然数を定義するには、（厳密ではないが）次のように定義する。

1. 0 は自然数。
2. a が自然数であるとき a^+ も自然数。
3. $a^+ = b^+$ のとき $a = b$。

4. $a^+ \neq 0$。

5. 以上によって $0^{++\cdots}$ の形に書けるものだけが自然数。

この公理 3, 4 は $1 = 0^+, 2 = 1^+, \ldots$ で順に定義される数がすべて異なることを確約するために必要である。この公理 5 は、このままでは使いにくい。そこで、代わりに次のような公理を導入する。

1. 0 は自然数。

2. a が自然数であるとき a^+ も自然数。

3. $a^+ = b^+$ のとき $a = b$。

4. $a^+ \neq 0$。

5. 0 がある性質 P を満たし、「n が性質 P を満たせば n^+ も性質 P を満たす」が成り立てば、すべての自然数は性質 P を満たす。

この公理 5 を数学的帰納法の原理という。この公理を**ペアノの公理**という。

1.2 集合を用いた定義

一方、より「ものを数える」、つまりものの集まりの要素を数えるという概念に密着し、集合によって自然数を規定する考えがある。

この場合、数があって、それによってものの集合の要素を数える、というよりは、様々な集合があって、それらを、集合の要素が何であるかを度外視することで、数という概念にたどり着くと考えるのが自然だと思われるのである。

たとえば、$\{0,1\}, \{+,-\}, \{\leftarrow,\rightarrow\}, \{\heartsuit,\diamondsuit\}$ などはいずれも「何か」と「別の何か」からなる集合である。そこでこれらの集合から 2 という数の概念に辿り着くのである。

また、$\{a,b\}, \{\leftarrow,\rightarrow,\leftrightarrow\}, \{\sharp,\flat,\natural\}$ などはいずれも「何か」と「別の何か」と「また別の何か」からなる集合である。そこでこれらの集合から 3 という数の概念に辿り着くのである。

2 つの集合 S, T の間に 1 対 1 の対応 $f : S \to T$ が存在するとき、 S, T の要素の個数は等しいといえる。そこでこのときに S と T は同じカテゴリーに属すると考え、このようにして分類したカテゴリーをもって自然数を規定するのである。

ここで、集合 S の属するカテゴリーを S の要素の個数とし、これを $|S|$ とする。

もっとも具体的に自然数を定義するのはまた別問題である。まず、たとえば 5 のような数を定義するのに「五つのものからなる集合」云々という定義の仕方をするわけにはいかない（定義の中に、これから定義すべき 5 という概念が含まれてしまっているため）。まず、明らかに $0 = |\phi|$ である。 1 はたとえば $\{0\}$ のような集合に対応している。それで、$1 = |\{0\}|$ と定義することができる。以下、$2 = |\{0,1\}|, \ldots, n^+ = |\{0,1,\ldots,n\}|$ のように定義できる。

2　位取り記数法

ここでは、加法・乗法に関しては「知っている」ものとして議論する。

まず､記号 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ を用意する。そして､$1 = 0^+, 2 = 1^+ = 0^{++}, \cdots, 9 = 8^+$ によって、$1, 2, \ldots, 9$ により表されている自然数を定める。さらに大きな自然数に対する記数法を定義するには、2 種類の方法がある。

Definition 2.1. 次のようにして､$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ をこの順に並べた記号の列 $\underline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$（積と区別するため、下線を付ける）で表されている自然数を定義する。

1. $10 = 9^+, 100 = 10 \times 10 = 10^2, 1000 = 100 \times 10 = 10^3, \ldots 100 \cdots (n\,個) \cdots 00 = 10^n$.
2. $\underline{a00 \cdots (n\,個) \cdots 00} = a \times 100 \cdots (n\,個) \cdots 00$.
3. $\underline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} = \underline{a_n 00 \cdots (n\,個) \cdots 00} + \underline{a_{n-1} 00 \cdots (n-1\,個) \cdots 00} + \cdots + a_0 = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_0$.

Example 2.1. $25 = 2 \times 10 + 5 = 10 + 10 + 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $2013 = 2 \times 10^3 + 10 + 3$.

加法や乗法によらずに定義するときは、次の定義を用いる。

Definition 2.2. 次のようにして､$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ をこの順に並べた記号の列 $\underline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}$（積と区別するため、下線を付ける）で表されている自然数を定義する。

1. $(\underline{a_n a_{n-1} \cdots a_0})^+ = \underline{a_n a_{n-1} \cdots (a_0)^+} (a_0 \neq 9)$.
2. $(\underline{a_n a_{n-1} \cdots a_m 99 \cdots (m\,個) \cdots 99})^+ = \underline{a_n a_{n-1} \cdots (a_m)^+ 00 \cdots (m\,個) \cdots 00} (a_m \neq 9)$.
3. $(\underline{99 \cdots (n\,個) \cdots 99})^+ = \underline{100 \cdots (n\,個) \cdots 00}$.

この二つの定義は同値である。これによる自然数 N の表記 $N = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_0 (a_{n-1} \neq 0)$ を N の 10 進表記という。

$N = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_0 (a_{n-1} \neq 0)$ と 10 進表記するとき、この文字列の長さ n を N の桁数と呼ぶ。また、a_k を N の 10^k の位と呼ぶ。

Example 2.2. N が偶数であることと、N の最下位の桁の数が偶数であることは同値。

$N = a_n a_{n-1} \cdots a_0$ と 10 進表記すると､$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_0 = 10(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 = 2 \times 5(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0$ より $N - a_0$ は偶数である。よって N が偶数であることと a_0 が偶数であることは同値である。

3 数の呼称

数詞を用いて数を表すことを**命数**と呼ぶ。

まず、$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ をそれぞれ**〇（零）、一、二、三、四、五、六、七、八、九** と呼ぶ。一方、$10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000, 10^4 = 10000$ をそれぞれ**十、百、千、万**と呼ぶ。9999 までの数は、1 桁毎に、一から九と、十、百、千を組み合わせる。ただし、位が 0 であるものは言及せず、十、百、千に付く一は省略できる。したがって、 1023 は、千二十三 となる。

万以降の数詞は小さいものから次の通りである：**万、億、兆、京、垓、𥝢** ([**禾**+**予**])**、穣、溝、澗、正、載、極、恒河沙、阿僧祇、那由他、不可思議、無量大数**（[禾+予] は塵劫記で誤記されたものが広まったもの）。

漢数字が現れた当初は 1 桁ごとに数詞を割り当てていた。すなわち、 10^5 を億、10^6 を兆と呼んでいた。これを**下数**という。漢代の頃から**上数**が記載されるようになった。これは数詞のあらわす数の 2 乗が次の数詞となった。したがって、10^8 が億、 10^{16} が兆となる。これを組み合わせて 10 の累乗を表現し、さらにそれを足し合わせることで数を表した。よって、 10^{31} は千万億兆、1234567890123456 は千二百三十四万五千六百七十八億九千十二万三千四百五十六となる。ただしこの命数法は実際に使われたことはないようである。

その後、10^8 倍ごとに新たな名称をつける**中数**方式が考案された。この方式では 10^{11} は千億、 10^{12} は万億、 10^{13} は十万億となり、 10^{16} は兆、 10^{24} は京となる。後に、現在用いられている、 10^4 倍ごとに新たな名称をつける方式に移行した（ただ、「塵劫記」の古い版では恒河沙から 10^8 倍ごとに次の数詞を使っており、現在でもかなりの書物がこれに従っているようである）。

なお、通常十の位以上につく一は省略するが、 $10^7 = 10000000$ から 10009999 までの数に限っては「一千万云々」と一を付して呼ぶことが多い。

英語においては、 0 から 9 を **zero, one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine** で表し、$10, 100, 1000$ を **ten, hundred, thousand** で表す。英語においては位が 1 であるときにも one を付する。漢字圏では 10^4 毎に区切るのに対し、英語では 10^3 毎の区切りとなる。だが、ここでも漢字圏と同様に複数の命数法が存在する。

10^3 の次の 10^6 は **million** で表し、それ以降、**billion, trillion, quadrillion, . . .** と ラテン語の数を表す接頭辞+illion で表わすのだが、10^3 倍ごとに新しい数詞となる命数法 (short scale) と、10^6 倍ごとに新しい数詞となる命数法 (long scale) が存在する。ラテン語の数を表す接頭辞+illion の造語法からわかるように、 million を基準とし、それを積み重ねる命数法であるから、 long scale が本来の命数法なのだが、アメリカでは 19 世紀以降 short scale が使われ、イギリスや、その他の多くの英語圏の国でも現代では short scale が使われる。ただ、大陸欧州の多くの国では、（それぞれの国の言語で）現在でも long scale に相当する命数法が使われる。

表 1: 数詞の一覧

万	10^4
億	10^8
兆	10^{12}
京	10^{16}
垓	10^{20}
廓 ([禾+予])	10^{24}
穣	10^{28}
溝	10^{32}
澗	10^{36}
正	10^{40}
載	10^{44}
極	10^{48}
恒河沙	10^{52}
阿僧祇	10^{56}
那由他	10^{60}
不可思議	10^{64}
無量大数	10^{68}